



## 1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

**Título:** Aplicaciones lineales que preservan ortogonalidad entre espacios de Hilbert

**Descripción general** (resumen y metodología):

En un espacio de Hilbert real o complejo,  $H$ , dos elementos  $x$  e  $y$  son ortogonales en el sentido Euclídeo ( $x \perp y$ ) si su producto interno es cero, es decir,  $(x|y)=0$ . Es bien conocido que toda isometría lineal entre dos espacios de Hilbert preserva productos escalares y por tanto envía elementos ortogonales a elementos ortogonales. Sea  $T: H_1 \rightarrow H_2$  una aplicación entre dos espacios de Hilbert. Diremos que  $T$  preserva ortogonalidad si  $x \perp y \Rightarrow T(x) \perp T(y)$ . Cuando la ortogonalidad entre los vectores  $x$  e  $y$  en  $H_1$  es equivalente a la ortogonalidad entre sus imágenes  $T(x)$  y  $T(y)$ , decimos que  $T$  preserva ortogonalidad en ambas direcciones o que preserva ortogonalidad fuertemente. Lo primero es notar que existen aplicaciones no lineales que preservan ortogonalidad, y lo segundo que la aplicación nula preserva ortogonalidad.

El primer objetivo será identificar y describir las aplicaciones lineales no nulas que preservan (fuertemente) ortogonalidad entre espacios de Hilbert. Posteriormente identificar algunas aplicaciones de este resultado por ejemplo en la compatibilidad de varios productos escalares que comparten los mismos elementos ortogonales.

Un objetivo mucho más ambicioso, y más difícil, consistirá en el estudio de las aplicaciones lineales no nulas entre espacios de Hilbert que preservan ortogonalidad de forma aproximada, es decir, aplicaciones lineales  $T: H_1 \rightarrow H_2$  verificando que para un determinado  $\varepsilon$  en  $[0,1)$  la condición  $x \perp y$  implica que  $|(T(x)|T(y))| \leq \varepsilon \|x\|^2 \|y\|^2$ . Aplicaciones de este resultado para estudiar la estabilidad de los preservadores de ortogonalidad. Este segundo objetivo será considerado sólo si la propuesta es de dificultad alta

**Tipología:** Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

**Objetivos planteados:**

- Estudio de las aplicaciones lineales no nulas que preservan (fuertemente) ortogonalidad entre espacios de Hilbert.
- Estudio de las aplicaciones lineales no nulas entre espacios de Hilbert que preservan ortogonalidad de forma aproximada.
- Aplicaciones al problema de estabilidad de preservadores de ortogonalidad.

**Bibliografía básica:**

- F. Cabello Sánchez, The singular case in the stability of additive functions, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002) 498-516.
- F. Cabello Sánchez, J.M.F. Castillo, Banach space techniques underpinning a theory for nearly additive mappings, Dissertationes Math. (2002), 404.
- J. Chmielinski, Linear mappings approximately preserving orthogonality, J. Math. Anal. Appl. 304, no. 1 (2005), 158--169.
- A. Koldobsky, Operators preserving orthogonality are isometries, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123 (1993) 835-837.

- V. Pambuccian, A logical look at characterizations of geometric transformations under mild hypotheses, Indag. Math. (N.S.) 11 (2000) 453-462.
- J. Rätz, Comparison of inner products, Aequationes Math. 57 (1999) 312-321.
- A. Tissier, A right-angle preserving mapping (a solution of a problem proposed in 1983 by H. Kestelman), Advanced Problem 6436, Amer. Math. Monthly 92 (1985) 291-292.

### **Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:**

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Cálculo I y II, Análisis Matemático I y II, Topología I, Análisis Funcional.

Nivel de dificultad estimado (bajo, medio, alto o gradual según objetivos): Gradual y adaptable por objetivos, niveles entre medio y alto.

**Plazas:** 1

### **2. DATOS DEL TUTOR/A:**

**Nombre y apellidos:** ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

**Ámbito de conocimiento/Departamento:** ANÁLISIS MATEMÁTICO

**Correo electrónico:** aperalta@ugr.es

### **3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):**

**Nombre y apellidos:**

**Ámbito de conocimiento/Departamento:**

**Correo electrónico:**

### **4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):**

**Nombre y apellidos:**

**Correo electrónico:**

**Nombre de la empresa o institución:**

**Dirección postal:**

**Puesto del tutor en la empresa o institución:**

### **5. DATOS DEL ESTUDIANTE:**

**Nombre y apellidos:** RAFAEL AMADOR PÉREZ

**Correo electrónico:** rafaeramador@correo.ugr.es