UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Propuesta TFG. Curso 2024/2025

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-027-2024/2025

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Conjetura sobre la conexión geométrica de las ecuaciones de Schwinger-Dyson

Descripción general (resumen y metodología):

Dada una densidad de probabilidad ρ en R^n, el valor esperado de un observable f se define integrando ρf sobre R^n y puede estimarse haciendo un muestreo con Monte Carlo. Pero Monte Carlo no es aplicable cuando la distribución ρ es compleja. El método de Langevin complejo (CL) intenta resolver este problema para ρ holomorfa yendo a la variedad compleja C^n y extendiendo analíticamente los observables. Una condición necesaria para un muestreo correcto es que se anule el valor esperado de $(\partial+v)f$ (siendo $v= \partial\rho/\rho$) para f arbitrario (ecuaciones de Schwinger-Dyson, SDE). Sin embargo SDE no es suficiente. Si Σ es una variedad n-dimensional en C^n tal que ρ se anula en $\partial\Sigma$ (siendo $\Sigma=R^n$ un caso particular) integración de $\rho(z)f(z)$ sobre Σ produce una solución de SDE. En [1] se conjeturó que combinaciones lineales de soluciones asociadas a Σ's proporcionaban la solución más general, y la conjetura se demostró en [2] para el caso n=1, donde también se analizan múltiples ejemplos. El método CL se basa en un proceso markoviano de tipo browniano en C^n modificable mediante la introducción de un kernel holomofo G. Cuando la distribución estacionaria obtenida converge suficientemente bien en el infinito se satisface la llamada ecuación de Fokker-Planck (FP) que implica una versión más débil que SDE, a saber, que se anule el valor esperado de $(\partial+v)G\partial f$ para f arbitrario.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Familiarizarse con estas ideas, siendo muy conveniente tener la posibilidad de hacer simulaciones numéricas simples como ayuda para formular conjeturas verosímiles. En [2] se estudiaron soluciones de SDE en n=1.

1) Estudiar en detalle el trabajo [2]. Algunas demostraciones se pueden simplificar. Opcionalmente se podrían hacer simulaciones Monte Carlo de casos concretos.

2) Buscar nuevas soluciones y estudiar casos particulares no analizados en [2].

3) Estudiar el efecto de un kernel. En [1] se muestra que un kernel puede introducir nuevas soluciones si G tiene ceros.

4) Intentar encontrar una formulación precisa y verificación o refutación de la conjetura para n>1, al menos en casos particulares. Si N_{SDE} es el número de soluciones de SDE y N_Γ el número de sábanas Σ inequivalentes, obviamente $N_\Gamma \leqslant N_{SDE}$ (ya que cada sábana produce una solución); la conjetura es la igualdad. Incluso una formulación precisa de N_{SDE} y N_Γ para n>1 parece extraordinariamente difícil en toda generalidad pero debe ser posible para familias de distribuciones holomorfas ρ concretas.

Bibliografía básica:

[1] L.L. Salcedo, Spurious solutions of the complex Langevin equation, Physics Letters B 305 (1993) 125-130

[2] L. L. Salcedo, E. Seiler, Schwinger–Dyson equations and line integrals, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 52 (2019) 3, 035201

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: LORENZO LUIS SALCEDO MORENO

Ámbito de conocimiento/Departamento: FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR

Correo electrónico: salcedo@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos:

Correo electrónico: