



1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: El Principio de Concentración-Compacidad de Lions y su Aplicación a Problemas Variacionales Críticos

Descripción general (resumen y metodología):

En este trabajo estudiaremos un tipo particular de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) elípticas de segundo orden que presentan dificultades analíticas debidas a la pérdida de compacidad, típicamente causada por simetrías, exponentes críticos o dominios no acotados. Este tipo de problemas aparece en ecuaciones semilineales como el problema de Brezis-Nirenberg o el problema de Yamabe, con aplicaciones en geometría y física matemática.

Cuando se aborda un problema variacional mediante métodos directos, la compacidad de sucesiones minimizantes es clave para garantizar la existencia de soluciones. Sin embargo, en presencia del exponente crítico de Sobolev, esta compacidad puede fallar. Para superar este obstáculo, analizaremos el principio de concentración-compacidad de P.-L. Lions, que caracteriza el comportamiento de sucesiones débiles en espacios de Sobolev, distinguiendo entre concentración de masa, fuga al infinito y dispersión.

Este principio proporciona un marco para recuperar resultados de existencia y entender fenómenos de pérdida de masa en problemas variacionales. A lo largo del trabajo, presentaremos su formulación abstracta y lo aplicaremos a problemas concretos, como minimizaciones con restricciones, identificando condiciones para la compacidad de sucesiones. La metodología combinará análisis funcional, teoría de Sobolev, teoría de medidas y técnicas variacionales, destacando su utilidad en problemas elípticos críticos donde fallan los métodos clásicos.

Tipología: Trabajos bibliográficos sobre el estado actual de una temática relacionada con el Grado.

Objetivos planteados:

Como primer paso, el alumno estudiará una introducción a los espacios de Sobolev y los resultados de inmersión compacta que permiten aplicar métodos variacionales clásicos. En este contexto se explicará cómo ciertas configuraciones (dominios no acotados, simetrías o exponente crítico) pueden provocar la pérdida de compacidad, impidiendo la aplicación directa del teorema de Weierstrass en espacios de dimensión infinita. Se recomienda la lectura de los textos [Brezis, Capítulo 9], [Evans, Capítulo 5].

En un segundo paso, se procederá a estudiar el Principio de Concentración-Compacidad de P.-L. Lions. Se prestará especial atención a su formulación, interpretación y utilidad para tratar problemas con pérdida de compacidad. A lo largo del desarrollo, se presentarán ejemplos concretos donde el principio se aplica para recuperar compacidad efectiva o para demostrar existencia de soluciones variacionales. A continuación, se abordarán problemas modelo, como el problema de Brezis-Nirenberg o la ecuación de Yamabe. En estos casos se verá cómo el principio permite describir el comportamiento de las sucesiones minimizantes y cuándo es posible recuperar convergencia o caracterizar fenómenos de concentración.

El trabajo se desarrollará mediante reuniones periódicas con el tutor, en las que se discutirán avances, se resolverán dudas técnicas y se proporcionará el material bibliográfico adicional necesario. Los objetivos matemáticos concretos:

- Comprender el papel de los espacios de Sobolev y las inmersiones compactas en el análisis variacional.

- Estudiar las causas y consecuencias de la pérdida de compacidad en problemas con exponentes críticos o simetrías.
- Conocer y formular correctamente el principio de concentración-compacidad.
- Aplicar dicho principio a problemas concretos de tipo elíptico para demostrar existencia de soluciones o describir el comportamiento de sucesiones críticas.
- Desarrollar un criterio estructurado para decidir cuándo un problema admite soluciones pese a la pérdida de compacidad.

Bibliografía básica:

[Bre] Haim Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, New York, NY : Springer, 2011.

[Evans] Lawrence C. Evans, Partial differential equations 2nd ed. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2010.

[Struwe] Michael Struwe, Variational Methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, Springer, 2008.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Haber cursado o cursar las asignaturas de Modelos Matemáticos II, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Análisis Funcional, Cálculo I, Cálculo II, Análisis Matemático I y Análisis Matemático II.

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: RAFAEL LÓPEZ SORIANO

Ámbito de conocimiento/Departamento: ANÁLISIS MATEMÁTICO

Correo electrónico: ralopezs@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos:

Correo electrónico: