



## 1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

**Título:** Dual del espacio de las funciones continuas y Teorema de Banach-Stone

**Descripción general** (resumen y metodología):

El espacio  $C(K)$ , de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto y Hausdorff  $K$  y con valores reales o complejos, equipado con la norma del supremo, es uno de los ejemplos clásicos de espacios de funciones estudiados en diversas áreas del Análisis Matemático y aparece en los orígenes mismos del Análisis Funcional.

El objetivo de esta propuesta es la revisión del Teorema de Banach-Stone para describir las isometrías (lineales) y sobreyectivas entre espacios de funciones  $C(K)$ . Este resultado forma parte de las primeras contribuciones dentro del Análisis Funcional, la Teoría Espectral de Operadores y la Teoría de  $C^*$ -álgebras. Son variadas las aplicaciones de este resultado en diversas ramas del Análisis Funcional. El primer objetivo de la propuesta consistirá en describir el espacio dual topológico de un espacio  $C(K)$ , equipado con la norma del supremo, con el espacio de las medidas de Borel regulares sobre  $K$  y con otros espacios de funciones de variación acotada.

Una de las aplicaciones del Teorema de Banach-Stone, permite asegurar que las isometrías lineales sobreyectivas entre espacios  $C(K)$  verifican una propiedad de naturaleza algebraico-topológica: preservan funciones con soportes disjuntos, es decir, si dos funciones tienen producto cero sus imágenes verifican la misma propiedad. Sin embargo la clase de los operadores lineales continuos entre espacios  $C(K)$  que preservan funciones con soportes disjuntos es estrictamente más amplia que la clase de las isometrías lineales y sobreyectivas entre dichos espacios. El siguiente objetivo es la descripción de los operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero como una extensión del Teorema de Banach-Stone.

En el ambiente de los espacios de funciones  $C(K)$ , las isometrías sobreyectivas permiten dar ejemplos y describir las proyecciones contractivas y bi-contractivas sobre este tipo de espacios. Concretamente, si  $T$  es una isometría sobre  $C(K)$  con  $T^2 = \text{Id}$ , entonces el operador  $P = \frac{1}{2}(\text{Id} + T)$  es una proyección bi-contractiva (es decir,  $\|P\| = \|\text{Id} - P\| = 1$ ). Estudiar las proyecciones contractivas y bi-contractivas sobre espacios  $C(K)$  para demostrar que los espacios  $C(K)$  pertenecen a la clase de los espacios de Banach  $X$  donde toda proyección bicontractiva sobre  $X$  es de la forma  $P = \frac{1}{2}(\text{Id} + T)$  para una cierta isometría  $T: C(K) \rightarrow C(K)$  con  $T^2 = \text{Id}$ .

**Tipología:** Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

**Objetivos planteados:**

Descripción del espacio dual topológico del espacio  $C(K)$  de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto Hausdorff  $K$ . Teoremas de Mazur-Ulam y Banach-Stone

Descripción de los operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios  $C(K)$

Operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios de funciones continuas sobre espacios localmente compactos Hausdorff

Estudio de las proyecciones bi-contractivas sobre  $C(K)$

**Bibliografía básica:**

John B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.

Fleming, R.J., Jamison, J. E., Isometries on Banach spaces: function spaces. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton,

FL, 2003.

Yaakov Friedman, Bernard Russo, Contractive projections on  $C_0(K)$ , Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), no. 1, 57–73.

Yaakov Friedman, Bernard Russo, Conditional expectation and bicontractive projections on Jordan  $C^*$ -algebras and their generalizations, Math. Z. 194 (1987), no. 2, 227–236.

Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, Classical Banach spaces I and II, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

Marshall H. Stone, Applications of the theory of boolean rings to General Topology, Trans. Amer. Math. Soc., 41 (1937), 375 – 481.

**Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:**

**Plazas:** 1

**2. DATOS DEL TUTOR/A:**

**Nombre y apellidos:** ANTONIO MIGUEL PERALTA PEREIRA

**Ámbito de conocimiento/Departamento:** ANÁLISIS MATEMÁTICO

**Correo electrónico:** aperialta@ugr.es

**3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):**

**Nombre y apellidos:**

**Ámbito de conocimiento/Departamento:**

**Correo electrónico:**

**4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):**

**Nombre y apellidos:**

**Correo electrónico:**

**Nombre de la empresa o institución:**

**Dirección postal:**

**Puesto del tutor en la empresa o institución:**

**Centro de convenio Externo:**

**5. DATOS DEL ESTUDIANTE:**

**Nombre y apellidos:** RICHARD WOLFENDALE CARO

**Correo electrónico:** richardwc@correo.ugr.es