



Propuesta TFG. Curso 2025/2026

GRADO: Grado en Matemáticas

CÓDIGO DEL TFG: 270-002-2025/2026

1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Curvas y Superficies espaciales del espacio de Lorentz-Minkowski

Descripción general (resumen y metodología):

Las propiedades básicas de las curvas y de las superficies del espacio euclidiano usual R3 se estudian

en la asignatura Curvas y Superficies. En este trabajo, se pretende realizar un estudio similar de curvas y superficies, pero en el espacio de Lorentz-Minkowski tridimensional, que no es más que la variedad diferenciable R3 junto con la métrica de Lorentz usual llana. Como el tema es muy amplio, y a veces realmente anti-intuitivo, nos ceñiremos a las propiedades más sencillas, y solamente en el

caso de las superficies espaciales.

Las actividades a realizar consistirán en la consulta de bibliografía, recopilación y ordenación de los resultados, explicitando las demostraciones. Se elaborará una memoria detallada en LaTeX.

- 1. Repaso de métricas de Lorentz en un espacio vectorial. Vectores espaciales, temporales y luminosos.
- 2. El espacio de Lorentz-Minkowski tridimensional L3.
- 3. Curvas regulares que admiten Triedro de Frenet.
- 4. Superficies espaciales de L3.
- 5. Primera forma fundamental. Fórmulas para parametrizaciones.
- 6. Aplicación de Gauss. Segunda forma fundamental. Fórmulas para parametrizaciones.
- 7. Curvatura media y curvatura de Gauss. Fórmulas para parametrizaciones.
- 8. Inexistencia de superficies espaciales compactas.

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Recabar los contenidos básicos de los siguientes conceptos:

- 1. Triedro de Frenet de una curva regular no luminosa.
- 2. Superficies espaciales.
- 3. Primera y segunda forma fundamentales.
- 4. Aplicaciones: curvatura media y curvatura de Gauss.
- 5. Existencia o no de superficies espaciales compactas.

Bibliografía básica:

[1] M. A. Javaloyes, M. Sánchez, An introduction to Lorentzian Geometry and its applications, XVI Escola de Geometria Diferencial, Sao Paulo, 12-16 julio 2010. Sao Carlos: Rima 2010, ISBN: 978-85-7656-180-4

[2] R. López, Differential Geometry of Curves and Surface in Lorentz-Minkowski Space, Int. Electron. J. Geom. 7 (2014), no. 1, 44–107.

[3] B. O'Neill. Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. New York, 1983.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Repartir el trabajo durante el curso. Se requiere buenos conocimientos de la asignatura "Curvas y Superficies".

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: MIGUEL ORTEGA TITOS

Ámbito de conocimiento/Departamento: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Correo electrónico: miortega@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

Centro de convenio Externo:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: PAULA MEI BECERRA SOTO

Correo electrónico: paumeibecerra@correo.ugr.es