



## 1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

**Título:** Caracterización de polinomios ortogonales clásicos: el Teorema de Bochner

**Descripción general** (resumen y metodología):

Las familias de polinomios ortogonales que ahora denominamos clásicas están asociadas a nombres tan relevantes en la historia de las matemáticas como Hermite, Laguerre, Jacobi. Existen múltiples caracterizaciones para estas familias de polinomios clásicas, pero probablemente la mejor conocida es que son las únicas familias de polinomios ortogonales que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinómicos de grado fijo. Esta propiedad era conocida prácticamente desde la aparición de estas familias de polinomios, pero no fué hasta 1929 cuando Bochner publicó su hoy famoso teorema que establece que, salvo un cambio de variable afin, sólo hay 5 familias de polinomios que sea solución de una ecuación diferencial de segundo orden, a saber: los polinomios de Hermite, Laguerre, Jacobi, las potencias de  $x$ , y los ahora denominados polinomios de Bessel. Sólo las tres primeras familias son familias de polinomios ortogonales con respecto a una función peso soportada en un intervalo de la recta real.

Hubo que esperar un poco más para la publicación de otras caracterizaciones de los polinomios ortogonales clásicos. Así, aparecen la caracterización de W. Hahn en 1935 que establece que estas familias son las únicas para las que sus derivadas son de nuevo ortogonales o la caracterización de Cryer a través de la fórmula de Rodrigues en 1970. Al Salam en 1972 caracteriza de nuevo a los polinomios ortogonales clásicos a través de la relación de estructura.

En la actualidad, existen muchas caracterizaciones, apareciendo alguna nueva cada cierto tiempo.

**Tipología:** Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

**Objetivos planteados:**

Introduciremos históricamente los polinomios ortogonales clásicos, cuyo estudio comienza con los trabajos de Legendre sobre las leyes de gravitación. Analizaremos con detalle la demostración de Bochner sobre la caracterización de las familias de polinomios ortogonales clásicos a través de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Finalmente demostraremos la equivalencia de esta caracterización con las de Hahn, Al-Salam o Cryer.

**Bibliografía básica:**

- [1] R. Alvarez-Nodarse, Polinomios hipergométricos y  $q$ -polinomios. Monografías del Seminario Matemático "García de Galdeano", Número 26. Prensas Universitarias de Zaragoza, Spain, 2003.
- [2] S. Bochner, Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme, Math. Z. **29** (1929), 730-736.
- [2] T. S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials. Mathematics and its Applications, Vol. 13. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.
- [3] M. E. H. Ismail, Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 98. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [5] F. Marcellán, A. Branquinho, J. C. Petronilho, Classical orthogonal polynomials: A functional approach. Acta Appl Math **34** (1994), 283-303.

**Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:**

Buen nivel en Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales y Métodos Numéricos

**Plazas:** 1

**2. DATOS DEL TUTOR/A:**

**Nombre y apellidos:** MIGUEL ÁNGEL PIÑAR GONZÁLEZ

**Ámbito de conocimiento/Departamento:** MATEMÁTICA APLICADA

**Correo electrónico:** mpinar@ugr.es

**3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):**

**Nombre y apellidos:**

**Ámbito de conocimiento/Departamento:**

**Correo electrónico:**

**4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):**

**Nombre y apellidos:**

**Correo electrónico:**

**Nombre de la empresa o institución:**

**Dirección postal:**

**Puesto del tutor en la empresa o institución:**

**5. DATOS DEL ESTUDIANTE:**

**Nombre y apellidos:** Lucía Jiménez González

**Correo electrónico:** luciajimgon@correo.ugr.es