Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022–2023)

Responsable de tutorización: Joaquín Pérez Muñoz *Departamento*: Geometría y Topología *Área de conocimiento*: Geometría y Topología
Responsable de cotutorización: *Departamento*: *Área de conocimiento*:
(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante): *Estudiante que propone el trabajo*: Carmen Atero Durán

Título del trabajo: La fórmula de integración en polares en una variedad Riemanniana

Tipología del trabajo (marcar una de las siguientes casillas):

☑ *Complemento de profundización*
☐ *Divulgación de las Matemáticas*
☐ *Docencia e innovación*
☐ *Herramientas informáticas*
☑ *Iniciación a la investigación*

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Curvas y superficies, Geometría Global de curvas y superficies, Variedades diferenciables.

Descripción y resumen de contenidos:

Se recordarán los conceptos básicos de geodésica y exponencial en una variedad Riemanniana y valor absoluto del Jacobiano de una aplicación diferenciable entre variedades Riemannianas. Esto se aplicará al caso particular de la aplicación $F(t,\xi) = \exp_{p_0}(t\xi)$, siendo p_0 un punto de una variedad Riemanniana, ξ un vector tangente unitario a M en p_0 y $\exp_{p_0}$ la exponencial en p_0. A la hora de calcular $|\text{Jac } F|$ saldrán de forma natural los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas radiales en p_0 que se anulan en $t = 0$, y el endomorfismo $\mathcal{A}(t,\xi)$ de $\langle\xi\rangle^\perp \subset T_{p_0}M$ que traslada paralelamente el valor de estos campos de Jacobi en t de nuevo hasta $t = 0$. La fórmula de cambio de variable en integración nos dará una herramienta para integrar funciones definidas alrededor de p_0 en términos de integrales dobles: una variable se moverá en la esfera unidad de $T_{p_0}M$ y la otra a lo largo de geodésicas radiales en p_0. Se verá cómo este planteamiento generaliza el caso clásico de integrar en coordenadas polares una función sobre un abierto del plano.
Se estudiarán las propiedades básicas de $\mathcal{A}(t,\xi)$ como solución de un problema de valores iniciales y se determinará su valor en variedades de curvatura seccional constante. Esto nos permitirá calcular los volúmenes de las esferas.

Actividades a desarrollar: La alumna estudiará parte del capítulo 6 del texto [3], con eventuales consultas en capítulos previos del mismo texto conceptos sobre geodésicas, campos de Jacobi, e introducción a la integración. Posiblemente se consultarán textos de integración más generales como [2]. Para los conceptos básicos de Geometría Riemanniana se usará [1].

Objetivos matemáticos planteados	
Objetivo	*Nivel de dificultad (bajo, medio o alto)*
Conocer el concepto de geodésica, exponencial y campo de Jacobi en una variedad Riemanniana	Bajo
Conocer una introducción a la integración en variedades Riemannianas, valor absoluto del Jacobiano y la fórmula de cambio de variable	Medio
Entender las propiedades básicas del endomorfismo $\mathcal{A}(t,\xi)$ al orden 0 y 1 en $t=0$, e interpretar la ecuación de Jacobi sobre una geodésica como un problema de valores iniciales para $\mathcal{A}(t,\xi)$ en la variable t.	Medio
Determinar $\mathcal{A}(t,\xi)$ para variedades modelo a partir del problema de valores iniciales anterior.	Medio
Aplicar lo anterior para calcular el volumen de las esferas $\mathbb{S}^n(1)$ con su métrica canónica en términos de la dimensión n.	Bajo

Bibliografía

[1] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics: theory and applications, Birkhäuser (1992).

[2] M. de Guzmán, B. Rubio, *Integración: teoría y técnicas*, Alhambra, Madrid (1979).

[3] J. Pérez, *Notas sobre Geometría Riemannian global*, Universidad de Granada, 2000.

Firma de la estudiante
(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de tutorización
(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de cotutorización
(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

En Granada, a 20 de marzo de 2022.