



Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022-2023)

Tutor/a: Antonio M. Peralta

Departamento: Análisis Matemático

Área de conocimiento: Análisis Matemático

Cotutor/a:

Departamento:

Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un alumno/a)

Alumno/a que propone el trabajo:

Título del trabajo: Aplicaciones lineales que preservan operadores de rango uno

Descripción, resumen de contenidos y actividades a desarrollar:

Sea M_n el álgebra de matrices cuadradas de orden n con entradas en el cuerpo de los números complejos. Los objetivos de este TFG se centrarán en determinar las condiciones necesarias y suficientes para que una transformación lineal sobre M_n preserve ciertos subconjuntos distinguidos. Sean U_n, H_n y R_k el grupo de las matrices unitarias en M_n , el conjunto de matrices Hermíticas en M_n y el conjunto de matrices de rango k ($k=1, \dots, n$), respectivamente. Sea T una transformación lineal en M_n . Pretendemos estudiar los siguientes resultados:

1. $T(R_k) \subset R_k$ para todo k si y solo si existen matrices invertibles U y V tales que $T(A)=UAV$ o $T(A)=UA^tV$ para todo A en M_n . Especial interés en el caso $k=1$.
2. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - (i) T conserva valores propios (contando multiplicidades) para H_n ;
 - (ii) T conserva valores propios para M_n ;
 - (iii) Existe una matriz unitaria U tal que $T(A)=UAU^{-1}$ o $T(A)=UA^tU^{-1}$ para todo A en M_n .
3. Las siguientes condiciones son equivalentes:
 - (i) $T(U_n) \subseteq U_n$;
 - (ii) T conserva determinantes;
 - (iii) Existen matrices unitarias U y V tales que $T(A)=UAV$ o $T(A)=UA^tV$ para todo A en M_n .

Estudio del problema 1. en el caso de matrices rectangulares y en el caso de espacios $B(H,K)$ de operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert complejos de dimensiones arbitrarias.

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Cálculo I y II, Análisis Matemático I y II, Topología I, Análisis Funcional

Nivel de dificultad estimado (bajo, medio, alto o gradual según objetivos): Gradual y adaptable por objetivos, niveles entre medio y alto.

<i>Objetivos planteados</i> (añadir cuando se considere oportuno una estimación del nivel de dificultad)	
<i>Objetivo</i>	<i>Nivel de dificultad</i>
Estudio de las transformaciones lineales sobre M_n que preservan matrices de rango uno.	medio-alto
Estudio de las transformaciones lineales sobre M_n que preservan matrices de rango k.	alto
Estudio de las transformaciones lineales sobre $M_{n,m}$ que preservan matrices de rango k.	alto
Estudio de las transformaciones lineales sobre M_n que preservan matrices unitarias.	medio-alto
Explorar los problemas anteriores en el caso de operadores lineales y acotados entre espacios de Hilbert complejos de dimensión arbitraria.	alto

Bibliografía:

- M. Marcus, B.N. Moys, Transformations on tensor product spaces, Pac. J. Math. 9 (1959), 1215-1221.
- M. Omladic, P. Semrl, Additive mappings preserving operators of rank-one, Linear Algebra Appl. 182 (1993), 239-256.
- R. Westwick, Transformations on tensor spaces, Pac. J. Math. 23 (1967), 613-620.

Granada, 08 de Mayo de 2022