Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022–2023)

Responsable de tutorización: PASCUAL JARA MARTÍNEZ
Departamento: ÁLGEBRA
Correo electrónico: pjara@ugr.es

Responsable de cotutorización:
Departamento:
Correo electrónico:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante):
Estudiante que propone el trabajo: **JESÚS ALBALAT RODRÍGUEZ**

Título del trabajo: **ANILLOS DE FUNCIONES CONTINUAS**

Tipología del trabajo (marcar una de las siguientes casillas):

☒ *Complemento de profundización*
☐ *Divulgación de las Matemáticas*
☐ *Docencia e innovación*
☐ *Herramientas informáticas*
☒ *Iniciación a la investigación*

Materias del grado relacionadas con el trabajo:

Cálculo I y II, Análisis Matemático I, Topología I, Variable Compleja I, Álgebra Conmutativa y Computacional, Álgebra Moderna.

Descripción y resumen de contenidos:

Sea X un espacio topológico, llamamos $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ al conjunto de las funciones continuas de X con valores en $\mathbb{R}$.
Podemos dar a $C(X)$ estructura de anillo definiendo la suma y el producto punto a punto, siendo el elemento uno la función constante igual a 1.
El anillo $C(X)$ refleja las propiedades topológicas de X y proporciona, variando X y $\mathbb{R}$, ejemplos de anillos que son útiles para construir contraejemplos a determinados enunciados.
Por ejemplo, cuando X es un espacio completamente regular ($T_{3\frac{1}{2}}$ ó Tychonoff), el comportamiento de los ideales primos y maximales es bastante singular:
(1) los ideales maximales de $C(X)$ están parametrizados por los puntos de la compactificación de Stone–Cech de X,
(2) todo ideal primo de $C(X)$ está contenido en un único ideal maximal,
(3) los ideales de $C(X)$ que contienen un ideal primo forman una cadena,
(4) toda suma de ideales primos en $C(X)$ es de nuevo un ideal primo.
Esta es una muestra de los resultados que se pretende exponer; esto es, que las propiedades topológicas del espacio X pueden ser estudiadas a través de propiedades algebraicas del anillo $C(X)$. En este estudio los ideales juegan un papel fundamental, y en particular los ideales primos y maximales. Además aparecen tipo de ideales: convexos y absolutamente convexos, z–ideales, d–ideales, ideales puros, ideales primos minimales, ideales esenciales y uniformes, el zócalo del anillo $C(X)$ y muchos otros tipos de ideales que se pueden definir mediante propiedades topológicas en X.
En esta misma línea podemos recuperar resultados clásicos como el teorema de Gel'fand–Kolmogorov que afirma que si X es un espacio compacto Hausdorff, y tomamos como base el cuerpo $\mathbb{C}$, se obtiene una identificación de X con el conjunto de los ideales maximales del anillo $C(X)$. Este resultado puede verse como la versión topológica del conocido teorema de los ceros de Hilbert en Geometría Algebraica.

Actividades a desarrollar:

1. Se estudiará los axiomas de separación, la compacidad, y otras propiedades, en espacios topológicos.
2. Se construirá el anillo de las funciones continuas de un espacio topológico con valores en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, estudiando sus ideales.
3. Se establecerá los resultados más significativos de la teoría.
4. Se buscará aplicaciones a la Topología, el Álgebra Conmutativa y la Geometría Algebraica.

Objetivos matemáticos planteados
Obtener una teoría de los espacios de funciones continuas.
Estudiar los ideales de los anillos de funciones continuas y su relación con propiedades topológicas.
Construir ejemplos de anillos de funciones continuas.
Establecer los resultados más significativos de la teoría.

Bibliografía

[1] Sudip Kumar Acharyya, Bedanta Bose A correspondence between ideals and z-filters for certain rings of continuous functions. Some remarks, Topology and its Applications, 160 (2013), 1603–1605.

[2] T. Dube, J. N. Nsayi, When certain prime ideals in rings of continuous functions are minimal or maximal, Topol. Appl., 192 (2015), 98–112.

[3] T. Dube, D. N. Stephen, On ideals of rings of continuous functions associated with sublocales, Topol. Appl., 284 (2020), 107360

[4] I. M. Gel'fand, A. N. Kolmogorov, "On rings of continuous functions on topological spaces", Dokl. Akad. Nauk SSSR 22 (1939), 11–15. English transl., Selected works of A. N. Kolmogorov, vol. I: Mathematics and mechanics, Kluwer, Dordrecht 1991, pp. 291ñ297.

[5] L. Gillman, M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Springer-Verlag, New York, 1978.

[6] J. A. Huckaba, Commutative Rings with Zero Divisors, Marcel Dekker, New York and Basel, 1988.

[7] P. T. Johnstone, Stone spaces, Cambridge Univ. Press, (1982).

[8] C. Kimber, Prime ideals in rings of continuous functions Ph D. Thesis Univ. Florida (1999).

[9] C. W. Kohls, Ideals in rings of continuous functions, Fund. Math., 45 (1957), 28–50.

[10] J. E. Mack, D. G. Johnson, The Dedekind completion of $C(A)$, Pacific J. Math., 20 (1967), 231–243.

[11] G. Mason, Prime ideals and quotient rings of reduced rings, Math. Jpn. 34(6) (1989), 941–956.

[12] C. J. Mulvey, A generalization of Gelfand duality, J. Algebra, 56 (1979), 499–505.

[13] E. A. A. Osba, Purity of the ideal of continuous functions with pseudocompact support, IJMMS, 29:7 (2002), 381–388.

[14] D. Rudd, On structure of ideals in rings of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc., 190 (1974), 393–403

[15] T. Shirota, On ideals in rings of continuous functions 30 (1954), 85–89.

[16] John J. Watkins, Topics in Commutative Ring Theory, Princeton Univ. Press (2007).

Firma del estudiante
(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de tutorización
(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

En Granada, a 1 de junio de 2022.