



## Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022-2023)

*Responsable de tutorización:* Prof. Dr. José Gómez Torrecillas

*Departamento:* Álgebra

*Correo electrónico:* gomezj@ugr.es

*Responsable de cotutorización:*

*Departamento:*

*Correo electrónico:*

*(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)*

*Estudiante que propone el trabajo:* D. Nicolás López Funes

*Título del trabajo:* Estructura de módulos finitamente generados sobre un DIP no conmutativo. Aplicaciones.

*Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):*

- Complementario de profundización
- Divulgación de las Matemáticas
- Docencia e innovación
- Herramientas informáticas
- Iniciación a la investigación

*Materias del grado relacionadas con el trabajo:*

*Descripción y resumen de contenidos:*

Los anillos de polinomios de Ore, cuya investigación sistemática comenzó en los años 30 del siglo pasado, han encontrado aplicaciones tecnológicas recientemente en el diseño de códigos correctores de errores con algoritmos de decodificación eficientes. En su versión más general, estos códigos resultan ser submódulos de módulos finitamente generados sobre el anillo de polinomios de Ore con coeficientes en un anillo de división, que es un DIP no conmutativo. Un campo más clásico de aplicación de estos módulos es el de los sistemas de ecuaciones diferenciales. Otro ejemplo relevante de DIP no conmutativo es el de los cuaterniones de Hurwitz, con aplicaciones en Teoría de Números.

*Actividades a desarrollar:*

El alumno deberá estudiar y escribir en lenguaje matemático actual el teorema de estructura que da título al presente TFG, a partir de las fuentes originales [W32, O33, J43]. En el caso de dominios euclídeos no conmutativos, analizará los aspectos constructivos de la demostración que llevan a un algoritmo para el cálculo de la descomposición de un módulo sobre dicho anillo a partir de una presentación libre finita del mismo. El estudiante analizará alguno de los ejemplos concretos mencionados en el apartado anterior, ilustrando su aplicación a alguno de los campos descritos (Códigos Correctores de Errores, Sistemas de Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Números o, eventualmente, Criptografía.)

*Objetivos matemáticos planteados*

Revisión de conceptos básicos sobre módulos, con especial atención sobre DIPs no conmutativos.

Desarrollo detallado de una demostración del teorema de módulos finitamente generados sobre un DIP no conmutativo, incluyendo los aspectos algorítmicos permitidos en el caso de disponer de una función euclídea.

Aplicación de la teoría general a alguno de los ejemplos citados en la descripción, a elección del alumno.

*Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:*

[GLN16] Gómez-Torrecillas, J. Lobillo F.J., Navarro, G. An isomorphism test for modules over a non-commutative PID. Applications to similarity of Ore polynomials, *Journal of Symbolic Computation* 75 (2016) 149–170.

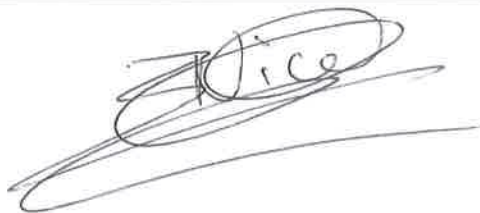
[GLS21] Gómez-Torrecillas, Navarro, G. and Sánchez-Hernández, J.P. Decoding Reed-Solomon Skew-Differential Codes, *IEEE Transactions on Information Theory* 2021.

[J43] Jacobson, N., 1943. *The Theory of Rings. Mathematical Surveys and Monographs*, vol.2. American Mathematical Society.

[J96] Jacobson, N., 1996. *Finite-Dimensional Division Algebras over Fields. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Series*, vol.233. Springer Science and Business Media.

[O33] O. Ore, Theory of non-commutative polynomials, *Annals of Mathematics* 34 (1933), 480-508.

[W32] Wedderburn, J.H.M., 1932. Non-commutative domains of integrity. *J. Reine Angew. Math.* 167, 129–141. <http://eudml.org/doc/149798>.



Firma del estudiante  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)



Firma del responsable de tutorización  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

En, Granada, a 25 de Mayo de 2022