**Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022-2023)**

*Responsable de tutorización:* Pilar Carrasco Carrasco.
*Departamento:* Álgebra
*Correo electrónico:* mcarrasc@ugr.es

*Responsable de cotutorización:*
*Departamento:*
*Correo electrónico:*

*(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)*
*Estudiante que propone el trabajo:*

*Título del trabajo:* Teorema general del funtor adjunto.

*Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):*

X☐Complementario de profundización
☐Divulgación de las Matemáticas
☐Docencia e innovación
☐Herramientas informáticas
☐Iniciación a la investigación

*Materias del grado relacionadas con el trabajo:* Todas las materias de álgebra.

*Descripción y resumen de contenidos:*

La Teoría de Categorías constituye una mirada a vista de pájaro de las matemáticas. Desde el cielo se nos escapan algunos detalles y llegan a ser invisibles, pero sin embargo podemos reconocer patrones que serían imposibles de detectar a nivel del suelo. Las fuentes originales de aplicación de la Teoría de Categorías son el Álgebra y la Topología, pero hoy en día el uso de esta teoría se ha extendido mas allá de dichas fuentes y ha alcanzado algunas partes de la matemática aplicada; quizá como ejemplo mas destacado, la Teoría de Categorías se ha convertido en una herramienta estándar en ciertas partes de Ciencias de la Computación.

La idea principal de la Teoría de Categorías es la noción de *propiedad universal*, fundamental en muchas partes de las matemáticas. Hay tres caminos diferentes de expresar propiedades universales: Vía límites (colímites), funtores representables y funtores adjuntos que a su vez están relacionados entre ellos. En este trabajo nos adentraremos en el estudio de cada uno de estos conceptos y las relaciones entre ellos para terminar con la demostración de algunos teoremas de existencia de funtores adjuntos.

Comenzando con las nociones de producto y coproductos, pullback y pushouts, etc., alcanzamos la noción mas general de (co)límite de un funtor. Demostraremos que todos los (co)límites pueden construirse a partir de unos pocos de tipo básico (como (co)productos, (co)igualadores, etc.) y daremos entonces diversas caracterizaciones de las categorías (co)completas (i.e., categorías en las que existe el (co)límite de cualquier funtor), así como caracterizaciones de preservación o reflexión de (co)límites por un funtor.

Los funtores *Hom* son particularmente importantes puesto que tienen la propiedad no sólo de que preservan (co)límites, sino que los detectan. Nos ocuparemos de estudiar los funtores que son naturalmente equivalentes a los funtores *Hom*, esto es, al estudio del concepto de representabilidad. Demostraremos el importante Lema de Yoneda y estudiaremos sus principales consecuencias, particularmente que toda categoría es equivalente, por medio del embebimiento de Yoneda, a una subcategoría de la categoría de prehaces sobre ella.

Funtores adjuntos es la tercera propuesta de propiedad universal que presentamos y uno de los conceptos fundamentales en Teoría de Categorías. El eslogan del conocido libro de MacLane (7) es

*Adjoint functors arise everywhere.*

Aportaremos numerosos ejemplos de funtores adjuntos que nos confirmarán la verdad de esta afirmación. Estudiaremos la noción de adjunción desde tres direcciones diferentes, la dada vía los bifuntores *Hom*, la correspondiente vía la unidad y counidad y la tercera dirección vía aplicaciones universales (u objetos iniciales). Probaremos que estas tres definiciones son equivalentes.

Una vez abordado la idea de propiedad universal desde los tres ángulos anteriores, estudiaremos las conexiones entre ellos, concluyendo con algunos resultados importantes y fundamentales en Teoría de Categorías. En concreto, demostramos el teorema de evaluación puntual, que nos permite afirmar (entre otras consecuencias) que la categoría de prehaces sobre una categoría pequeña $A$ es completa y cocompleta; que el embebimiento de Yoneda preserva límites (no así colímites); el teorema de densidad (que establece que todo prehaz sobre una categoría pequeña es un colímite de representables) cuya consecuencia fundamental es que la categoría de prehaces sobre una categoría pequeña es una categoría cartesiana cerrada. Finalmente, concluiremos con el teorema general del funtor adjunto (sobre condiciones para la existencia de un adjunto, izquierda o derecha, a un funtor dado) que da título al trabajo.

*Actividades a desarrollar:*

- Busqueda de la bibliografía recomendada.
- Estudio de los resultados y conceptos preliminares sobre teoría de categorías necesarios.
- Estudio tutorizado de los resultados a desarrollar.
- Verificación de los objetivos propuestos.
- Edición del trabajo realizado para su presentación.

| *Objetivos matemáticos planteados* |
|---|
| *Preliminares básicos de categorías, funtores y transformaciones naturales.* |
| *Límites y colímites. Categorías completas y cocompletas.* |
| *Funtores representables. Lema de Yoneda.* |
| *Funtores adjuntos* |
| *El Teorema general del funtor adjunto.* |
| |

*Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:*


1. Adamek, J., Herrlich, H., Strecker, G., Abstract and concrete categories. Wiley and Sons (1990).
2. Awodey, S., Category Theory. Oxford University Press (2010).
3. Barr, M., Wells, C., Toposes, triples and theories. Springer (1985).
4. Barr, M., Wells, C., Category Theory. Les publications Centre de recherches mathématiques (1999)
5. Borceux, F., Handbook of Categorical Algebra, Volumes 1-3. Cambridge University Press (1994).
6. Leinster, T., Basic Category Theory. Cambridge Studies in advanced mathematics. Cambridge University Press (2014)
7. MacLane, S., Categories for the working mathematician. Springer (1971); second edition with two new chapters (1998).
8. Mitchell, B., Theory of categories. Acad. Press (1973).
9. Pareigis, B., Categories and functors. Acad. Press (1970).
10. Schubert, H., Categories. Springer (1972).


*Otras referencias (si procede):*

Firma del estudiante
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del responsable de tutorización
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de cotutorización
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

En, Granada, a 24 de mayo de 2022