



Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021–2022)

<i>Responsable de tutorización:</i> Ignacio Sánchez Rodríguez <i>Departamento:</i> Geometría y Topología <i>Correo electrónico:</i> ignacios@ugr.es
<i>Responsable de cotutorización:</i> <i>Departamento:</i> <i>Correo electrónico:</i>
<i>(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante):</i> <i>Estudiante que propone el trabajo:</i> Alejandro de la Cueva Merino

<i>Título del trabajo:</i> La derivada schwarziana y sus aplicaciones geométricas
<i>Tipología del trabajo (marcar una de las siguientes casillas):</i> <input checked="" type="checkbox"/> <i>Complemento de profundización</i> <input type="checkbox"/> <i>Divulgación de las Matemáticas</i> <input type="checkbox"/> <i>Docencia e innovación</i> <input type="checkbox"/> <i>Herramientas informáticas</i> <input type="checkbox"/> <i>Iniciación a la investigación</i>
<i>Materias del grado relacionadas con el trabajo:</i> Geometría diferencial, Variable compleja y Ecuaciones diferenciales ordinarias.
<i>Descripción y resumen de contenidos:</i> <p>La derivada schwarziana (en adelante, DS) es un operador diferencial sobre funciones reales o complejas que involucra las derivadas hasta el tercer orden:</p> $Sf := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \quad (1)$ <p>Las propiedades de DS hacen que esta encuentre diversas aplicaciones en los campos del análisis complejo y de las ecuaciones diferenciales. Algunas de estas propiedades tienen un carácter marcadamente geométrico, como la caracterización de las reparametrizaciones proyectivas de una curva o de las transformaciones de Moebius por la ecuación $Sf = 0$, y la propiedad de la invariancia de DS por estas mismas transformaciones. Una interpretación geométrica de la DS es que mide la deformación por un difeomorfismo de la razón doble (cross-ratio) de cuatro puntos infinitesimalmente próximos.</p>



Actividades a desarrollar:

Asimilación del concepto de DS y su utilidad en diferentes contextos conocidos de las ecuaciones diferenciales, de la variable compleja y de la geometría de curvas y superficies. Demostrar las propiedades básicas de la DS.

Búsqueda y organización de la bibliografía relevante a las aplicaciones geométricas de la DS tanto en castellano como en otras lenguas, fundamentalmente en la lengua inglesa.

En base a las dos fases anteriores, el estudiante ha de describir cuáles son las aplicaciones geométricas de la DS que ha detectado.

Estudiar en profundidad la relación entre la DS y la razón doble de cuatro puntos de \mathbb{R} .

Objetivos matemáticos planteados

Asimilación del concepto de DS y de su uso en diferentes contextos conocidos.

Búsqueda y organización de la bibliografía sobre las aplicaciones geométricas de la DS.

Caracterización del grupo de transformaciones de la recta proyectiva y del grupo de Moebius.

Resolver la ecuación diferencial de tercer orden: $Sf = k$ (cte.) en variable real y compleja.

Estudio de la relación entre la variación de la razón doble por un difeomorfismo local de \mathbb{R} y su derivada schwarziana.

Interpretación de la DS como cierto tipo de invariante de curvatura.

Bibliografía

- [1] L. V. AHLFORS, Cross-ratios and Schwarzian derivatives in \mathbb{R}^n . En *Complex Analysis* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1988), pp. 1–15.
- [2] H. FLANDERS, The Schwarzian as a curvature, *Journal of Differential Geometry*, **4**, (1970), núm. 4, 515–519.
- [3] B. OSGOOD, D. STOWE, The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds, *Duke Mathematical Journal*, **67**, (1992), 57–99.
- [4] V. OVSIENKO, S. TABACHNIKOV, *Projective Differential Geometry Old and New : From the Schwarzian Derivative to the Cohomology of Diffeomorphism Groups*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [5] V. OVSIENKO, S. TABACHNIKOV, What is ... the Schwarzian Derivative? *Notice of the AMS*, **56**, (2009), núm. 1, 2–4.

Firma del estudiante

(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de tutorización

(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)



*Firma del responsable de cotutorización
(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)*

En Granada, a 14 de mayo de 2021.

Firma (1): IGNACIO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ
En calidad de: Personal docente e investigador



Este documento firmado digitalmente puede verificarse en <https://sede.ugr.es/verifirma/>
Código seguro de verificación (CSV): **3C3484184256A7EA23521C5AC3F42FE4**

14/05/2021 - 12:22:55
Pág. 3 de 3