



Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021-2022)

Responsable de tutorización: **Antonio M. Peralta**

Departamento: **Análisis Matemático**

Área de conocimiento: **Análisis Matemático**

Responsable de cotutorización:

Departamento:

Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)

Estudiante que propone el trabajo: **Javier López Martínez**

Título del trabajo: **Teoremas de Banach-Stone y proyecciones bicontractivas**

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

- Complementario de profundización
- Divulgación de las Matemáticas
- Docencia e innovación
- Herramientas informáticas
- Iniciación a la investigación

Materias del grado relacionadas con el trabajo: **Cálculo I y II, Análisis Matemático I y II, Topología I, Análisis Funcional**

Descripción y resumen de contenidos:

El espacio $C(K)$, de las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto y Hausdorff K y con valores reales o complejos, equipado con la norma del supremo, es uno de los ejemplos clásicos de espacios de funciones estudiados en diversas áreas del Análisis Matemático y aparece en los orígenes mismos del Análisis Funcional.

El objetivo de esta propuesta es la revisión del Teorema de Banach-Stone para describir las isometrías (lineales) y sobreyectivas entre espacios de funciones $C(K)$. Este resultado forma parte de las primeras contribuciones dentro del Análisis Funcional, la Teoría Espectral de Operadores y la Teoría de C^* -álgebras. Son variadas las aplicaciones de este resultado en diversas ramas del Análisis Funcional.

Una de las aplicaciones del Teorema de Banach-Stone, permite asegurar que las isometrías lineales sobreyectivas entre espacios $C(K)$ verifican una propiedad de naturaleza más algebraica, es decir, preservan funciones con soportes disjuntos, si dos funciones tiene producto cero sus imágenes verifican la misma propiedad. Sin embargo la clase de los operadores lineales y continuos entre espacios $C(K)$ que preservan funciones con soportes disjuntos es estrictamente más amplia que la clase de las isometrías lineales y sobreyectivas entre dichos espacios. El siguiente objetivo para este TFG es la descripción de los operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero como una extensión del Teorema de Banach-Stone.



En el ambiente de los espacios de funciones $C(K)$, las isometrías sobreyectivas permiten dar ejemplos y describir las proyecciones contractivas y bi-contractivas sobre este tipo de espacios. Si T es una isometría sobre $C(K)$ con $T^2 = Id$, entonces el operador $P = \frac{1}{2}(Id + T)$ es una proyección bi-contractiva (es decir, $\|P\| = \|Id - P\| = 1$). Estudiar las proyecciones contractivas y bi-contractivas sobre espacios $C(K)$ con el objetivo de demostrar que los espacios $C(K)$ pertenecen a la clase de los espacios de Banach X donde toda proyección bicontractiva sobre X es de la forma $P = \frac{1}{2}(Id + T)$ para una cierta isometría lineal $T: C(K) \rightarrow C(K)$ con $T^2 = Id$.

Actividades a desarrollar:

Reunir referencias bibliográficas y pruebas de los resultados publicadas en libros y artículos de investigación.

Abordar de forma autónoma los resultados y sus demostraciones.

Objetivos matemáticos planteados

Teoremas de Mazur-Ulam y Banach-Stone

Descripción de los operadores operadores lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios $C(K)$

Operadores lineales lineales y continuos que preservan funciones con producto cero entre espacios de funciones continuas sobre espacios localmente compactos Hausdorff

Estudio de la proyecciones bi-contractivas sobre $C(K)$

Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:

- John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.
- Fleming, R.J., Jamison, J. E., *Isometries on Banach spaces: function spaces*. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 129. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
- Yaakov Friedman, Bernard Russo, Contractive projections on $C_0(K)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273** (1982), no. 1, 57–73.
- Yaakov Friedman, Bernard Russo, Conditional expectation and bicontractive projections on Jordan C^* -algebras and their generalizations, *Math. Z.* **194** (1987), no. 2, 227–236.
- Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- Marshall H. Stone, Applications of the theory of boolean rings to General Topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 375 – 481.



En, Granada, a 29 de Abril de 2021

