



Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2020–2021)

Responsable de tutorización: Antonio Martínez López

Departamento: Geometría y Topología

Área de conocimiento: Geometría y Topología

Responsable de cotutorización:

Departamento:

Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante):

Estudiante que propone el trabajo: Enrique Martínez Collado



Título del trabajo: Superficies completas de curvatura constante

Tipología del trabajo (marcar una de las siguientes casillas):

- Complemento de profundización*
- Divulgación de las Matemáticas*
- Docencia e innovación*
- Herramientas informáticas*
- Iniciación a la investigación*

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Geometría III, Topología I, Taller de Geometría y Topología, Curvas y Superficies, Variedades diferenciables

Descripción y resumen de contenidos:

En 1827, Carl Friedrich Gauss presentó la obra que es considerada como precursora de la Geometría Diferencial, “Disquisitiones generales circa superficies curvas” en la que introdujo los conceptos de aplicación de Gauss, curvatura de Gauss y obtuvo fórmulas básicas para su interpretación y estudio. En su trabajo Gauss definió la curvatura de una superficie como una función que mide cómo una superficie se desvía en un punto de su plano tangente.

Entre las superficies riemannianas completas simplemente conexas, las de curvatura constante son las más simples y las primeras que aparecieron en el estudio de las geometrías no Euclídeas. Estos espacios poseen un importante número de isometrías que permiten la libre movilidad de pequeños triángulos y salvo isometrías son el plano euclídeo, la esfera euclídea y el plano hiperbólico o plano de Lobachevski.

Con esta memoria trataremos de ver si estos espacios modelo se pueden realizar como superficies inmersas en \mathbb{R}^3 y en su caso de cuántas formas posibles. Por su enorme interés, el estudio global de las superficies con curvatura constante fue abordado y resuelto con relativa prontitud. Los resultados de H. Liebmann en 1899 y D. Hilbert en 1901 prueban que la única superficie cerrada con curvatura constante no nula en \mathbb{R}^3 es la esfera y que el plano hiperbólico no se puede realizar dentro de \mathbb{R}^3 sin la aparición de singularidades. Posteriormente, estudios sucesivos de P. Hartman y L. Nirenberg en 1959, J.J. Stoker en 1961 y W.S. Massey en 1962 demuestran, de forma independiente, que toda superficie completa con curvatura de Gauss nula en \mathbb{R}^3 es un cilindro recto sobre una curva plana, simple y definida para todo valor de su parámetro arco.

El trabajo se va a estructurar hacia los siguientes objetivos:

- Desarrollar y fundamentar el tema desde una perspectiva histórica,
- Realizar un planteamiento adecuado de los conceptos y objetos necesarios para su estudio.
- Enunciar y demostrar los resultados de clasificación de estas superficies



Actividades a desarrollar:

- Recopilación de material y estudio histórico del tema
- Caso de curvatura constante positiva: Teorema de Liebmann
- Caso de curvatura constante nula. Teorema de Hartman-Nirenberg
- Caso de curvatura constante negativa. Teorema de Hilbert.

Objetivos matemáticos planteados

Recopilación de material y estudio histórico del tema

Superficies de curvatura constante positiva: Teorema de Liebmann

Superficies llanas. Teorema de Hartman-Nirenberg

Superficies de curvatura constante negativa. Teorema de Hilbert.

Bibliografía

- [1] M. P. DO CARMO, *Geometría Diferencial de curvas y superficies*, Alianza Editorial S. A., Madrid, 1990.
- [2] M. P. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.
- [3] J. A. GÁLVEZ, Surfaces of constant curvature in 3-dimensional space forms, *Mat. Contemp.* 37, Winter School on Nonlinear Analysis, 1-42, Soc. Bras. Mat., Rio de Janeiro, 2009.
- [4] M. SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. III. Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1975.

Firma del estudiante

(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de tutorización

(sólo para trabajos propuestos por estudiantes)

