Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021-2022)

Tutor/a: Miguel Cabrera García *Departamento:* Análisis Matemático *Área de conocimiento:* Análisis Matemático	
Cotutor/a: Antonio Moreno Galindo *Departamento:* Análisis Matemático *Área de conocimiento:* Análisis Matemático	
(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un alumno/a) *Alumno/a que propone el trabajo:*	

Título del trabajo: Álgebras absolutamente valuadas

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

☒ Complementario de profundización
☐ Divulgación de las Matemáticas
☐ Docencia e innovación
☐ Herramientas informáticas
☒ Iniciación a la investigación

Materias del grado relacionadas con el trabajo:

Análisis Matemático II
Variable Compleja I y II
Análisis Funcional
Topología I y II
Álgebras, Grupos y Representaciones
Álgebra Moderna

Descripción y resumen de contenidos:

Las álgebras absolutamente valuadas se definen como las álgebras reales A dotadas de una norma $\|.\|$ satisfaciendo $\|ab\|=\|a\|\,\|b\|$ para cualesquiera elementos a y b de A.

A pesar de la simplicidad de su definición, las álgebras absolutamente valuadas no se consideraron en sus inicios demasiado atractivas. Quizás esto se debió al hecho de que en contexto asociativo únicamente hay tres álgebras absolutamente valuadas. Sin embargo, si se elimina la asociatividad, las álgebras absolutamente valuadas son muy abundantes, y han llamado la atención de matemáticos y físicos.

Los artículos pioneros de la teoría se deben a Ostrowski [Os], Mazur [M], Albert [A1,A2], Wright [W], y Urbanik [U]. Un punto de inflexión en la teoría se originó con los artículos de Urbanik-Wright [UW1, UW2]. En el primero de ellos se estableció el que hoy día se conoce como el Teorema no conmutativo de Urbanik-Wright, que afirma que R (los reales), C (los complejos), H (los cuaternios) y O (los octoniones) son las únicas álgebras absolutamente valuadas unitales. Este resultado, sin duda, es una de las joyas de la teoría de las álgebras normadas no asociativas.

En las últimas décadas han aparecido numerosos trabajos (de entre los que únicamente destacamos unos pocos) relativos al estudio de las álgebras absolutamente valuadas que satisfacen algunas identidades concretas [E2], que son algebraicas [KRR], que tienen una unidad por la izquierda [R], que tienen una involución de álgebra [E1, R], que son H*-algebras [CuR], o que son de dimensión finita [Ok].

Actividades a desarrollar:

El propósito de este Trabajo Fin de Grado es elaborar una guía de los resultados principales de la teoría de las álgebras absolutamente valuadas, analizando su complejidad y dependencia, así como la búsqueda y ordenación de las referencias bibliográficas que sean necesarias.

Las principales referencias serán el artículo recopilatorio [R] y el libro [CR].

Objetivos matemáticos planteados	
Objetivo	*Nivel de dificultad (bajo, medio o alto)*
Exposición de los resultados algebraicos necesarios	Medio
Exposición de los resultados analíticos necesarios	Medio/Alto
Ordenación comparativa de los principales resultados	Alto

Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:

[A1] **A. A. Albert,** Absolute valued real algebras. *Ann. Math.* **48** (1947), 495-501. Correction in *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 1191.

[A2] **A. A. Albert,** Absolute valued algebraic algebras. *Bull. Amer. Math. Soc* **55** (1949), 763-768. A note of correction. *Ibid.* **55** (1949), 1191.

[CR] **M. Cabrera and Á. Rodríguez,** *Non-associative normed algebras. Volume 1: The Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark Theorems, and Volume 2: Representation Theory and the Zel'manov Approach*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **154** and **167**. Cambridge University Press, 2014 and 2018.

[CuR] **J. A. Cuenca** and **Á. Rodríguez,** Absolute values on H*-algebras. *Commun. Algebra* **23** (1995), 1709-1740.

[E1] **M. L. El-Mallah,** Absolute valued algebras with an involution. *Arch. Math.* **51** (1988), 39-49.

[E2] **M. L. El-Mallal,** Absolute valued algebras satisfying $(x,x,x^2)=0$. *Arch. Math.* **77** (2001), 378-382.

[KRR] **A. Kaidi, M. I. Ramírez,** and **Á. Rodríguez,** Absolute-valued algebraic algebras are finite-dimensional. *J. Algebra* **195** (1997), 295-307.

[M] **S. Mazur,** Sur les anneaux linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris* **207** (1938), 1025-1027.

[Ok] **S. Okubo,** Pseudo-quaternion and pseudo-octonion algebras. *Hadronic J.* **1** (1978), 1250-1278.

[Os] **A. Ostrowski,** Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\Psi(x)\Psi(y)=\Psi(xy)$. *Acta Math.* **41** (1918), 271-284.

[R] **Á. Rodríguez,** Absolute-valued algebras, and absolute-valuable Banach spaces. In *Advanced Courses of Mathematical Analysis I, Proceedings of the First International School Cádiz, Spain 22-27 September 2002* (Ed. by A. Aizpuru-Tomás and F. León-Saavedra), World Scientific, 2004, pp. 99-155.

[U] **K. Urbanik,** Absolute valued algebras with an involution. *Fundamenta Math.* **49** (1961), 247-258.

[UW1] **K. Urbanik** and **F. B. Wright,** Absolute valued algebras. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **8** (1960), 285-286.

[UW2] **K. Urbanik** and **F. B. Wright,** Absolute valued algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 861-866.

[W] **F. B. Wright,** Absolute valued algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39** (1953), 330-332.

Firma del alumno/a
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del tutor/a
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del cotutor/a
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

En, Granada, a 12 de Mayo de 2021