Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021-2022)

Responsable de tutorización: Julio Becerra Guerrero *Departamento: Análisis Matemático* *Área de conocimiento: Análisis Matemático*

Título del trabajo: Teorema espectral de operadores normales compactos en espacios de Hilbert. Propiedades de Diámetro dos en espacios de operadores.
Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas): *X*☐Complementario de profundización ☐Divulgación de las Matemáticas ☐Docencia e innovación ☐Herramientas informáticas *X*☐Iniciación a la investigación
Materias del grado relacionadas con el trabajo: Análisis Funcional y Análisis Matemático II
Descripción y resumen de contenidos: Uno de los problemas principales en la Teoría de Operadores es el cálculo del espectro de operadores en espacios de dimensión infinita, especialmente en espacios de Hilbert. La teoría espectral de cierta clase de operadores en espacios de Hilbert fue iniciada por el propio Hilbert en 1904; tiene importantes aplicaciones a problemas de análisis clásico, especialmente en ecuaciones diferenciales (Problema de Sturn-Liouville). También es una herramienta indispensable en el estudio de álgebras de operadores en espacios de Hilbert, que son los que forman la base matemática de la Mecánica Cuántica. El objetivo de este trabajo, será demostrar el teorema espectral de Operadores normales compactos sobre espacios de Hilbert. Esto representa una introducción natural a la teoría espectral de operadores arbitrarios en espacios de Hilbert. Por este motivo, uno de las actividades a desarrollar sería una recopilación histórica donde se aborden todos los autores que han trabajado en este resultado así como sus aportaciones. La demostración del Teorema espectral de operadores normales compactos en espacios de Hilbert, será consecuencia del Teorema de Riesz-Schauder para operadores compactos en espacios normados. **LA PROPIEDAD DEL DIÁMETRO DOS EN ESPACIOS DE BANACH.** Dado un espacio de Banach X, denotaremos por S(X) y B(X) la esfera y la bola unidad, respectivamente. Comenzamos recordando las siguientes definiciones. Sea X un espacio de Banach: 1) Se dice que X tiene la propiedad de diámetro dos para slices (slice-D2P) si todo slice de B(X) tiene diámetro 2. 2) Se dice que X tiene la propiedad de diámetro dos (D2P) si todo abierto débil no vacío relativo a B(X) tiene diámetro 2. 3) Se dice que X tiene la propiedad fuerte de diámetro dos (strong-D2P) si toda combinación convexa de slices de B(X) tiene diámetro 2.

Cuando X es un espacio de Banach dual, se definen las versiones w* de las propiedades anteriores cambiando el concepto de slice (respectivamente de abierto débil) por el de w*-slice (respectivamente abierto débil-*).

En el trabajo de O. Nygaard y D. Werner [NyWe], prueban que algunos de los espacios de Banach clásicos que fallan a la propiedad de Radon-Nikodym, de hecho fallan a condiciones mucho más débiles. En este trabajo demuestran que toda álgebra uniforme infinito-dimensional, satisface la propiedad del diámetro dos. Este teorema se puede aplicar a los C(K)-espacio infinito dimensional reales o complejos, K para espacio de Hausdorff compacto. Otros espacios de Banach que disfrutan de la propiedad del diámetro dos son las C*-algebras infinito dimensionales, las JB-álgebras cuyos espacios de Banach no son isomorfos a espacios de Hilbert [BeLoRo], los JB*-triples reales o complejos cuyos espacios de Banach no son isomorfos a espacios de Hilbert [BeLoPeRo], así como los espacios de funciones continuas de un espacio compacto Hausdorff infinito a un espacio de Banach provisto de la topología débil [BeLo]. Una herramienta que ha resultado ser crucial en el estudio de la propiedad del diámetro dos, es la teoría del centralizador de un espacio de Banach, en el sentido de E. Behrends [B]. En [BeRo10], demostramos que todo espacio de Banach con centralizador infinito dimensional tiene la propiedad del diámetro dos. Las técnicas empleadas en este último trabajo nos permitieron estudiar la propiedad del diámetro dos tanto en el tensor proyectivo, proyectivo simétrico y en el tensor inyectivo de dos espacios de Banach, (ver [AcBeRo], [AcBe1] y [AcBe2]). Más recientemente, se ha profundizado en el estudio de las tres propiedades anteriormente definidas. Es claro que 3) implica 2) y que 2) implica 1), que el recíproco no es cierto se demuestra en los trabajos [BeLoRu] y [BeLoRu1]

a) Todo espacio de Banach con copia isomorfa de c_0 se puede renormar equivalentemente de manera que toda slice de su bola unidad tenga diámetro dos y existan abiertos débiles relativos a su bola unidad de diámetro arbitrariamente pequeño.

b) Todo espacio de Banach con copia isomorfa de c_0 se puede renormar equivalentemente de manera que todo abierto débil relativo a su bola unidad tenga diámetro dos y existan combinaciones convexas de rebanadas de su bola unidad de diámetro arbitrariamente pequeño.

Diremos que un espacio de Banach X tiene norma octahedral si para todo subespacio F de dimensión finita y para todo $\epsilon>0$ existe u en S(X) tal que $\|x+\lambda u\|\geq(1-\epsilon)(\|x\|+|\lambda|)$ para todo x en F y todo número real λ.

En una serie de trabajos G. Godefroy y N. Kalton demuestran que un espacio de Banach contiene copia isomorfa de l_1 si y sólo si X se puede renormar equivalentemente con una norma octahedral.

Otro resultado que se ha obtenido en [BeLoRu2] y que ha resultado ser una herramienta crucial en el estudio de las propiedades anteriores, involucra el concepto de norma octahedral:

La norma de un espacio de Banach X es octahedral si y sólo si toda combinación convexa de w*-slice de B(X) tiene diámetro dos.

En [GGMS], Ghoussoub, Godefroy, Maurey y Schachermayer presentan, quizás por primera vez, una notable propiedad geométrica de la cara de los elementos positivos F de la bola unidad del clásico espacio de Banach L_1[0, 1]. De hecho, se demuestra en [GGMS, Observación IV.5, p. 48] que cualquier combinación convexa de un número finito de abiertos débiles relativos a F es un abierto débil relativo a F. Es bien sabido que en general una combinación convexa finita de abiertos débiles relativos a la bola unidad de un espacio de Banach no es un abierto débil relativo a la bola unidad. En esta línea de trabajo se encuentra los trabajos [AL] y [HKP], donde se demuestra que en C(K) para K espacio compacto de Hausdorff, toda combinación convexa finita de slices de la bola unidad es un abierto débil relativo a la bola unidad (propiedad P) si y solo si K es disperso (scattered space). Este resultado lo mejoramos en el trabajo [ABHLP] donde se demuestra que para K espacio compacto de Hausdorff y X espacio normado estrictamente convexo de dimensión finita, C(K,X) el espacio de las funciones continuas de K en X tiene la

propiedad (P) si y sólo si K es disperso.
Hasta la fecha, los resultados recogidos en el párrafo anterior constituyen las aportaciones más relevantes del Grupo Solicitante en este tema. Conviene resaltar que todo espacio de Banach con la propiedad de Daugavet, tiene la propiedad del diámetro dos [Sh], es bien sabido que el recíproco no es cierto. El Grupo Solicitante ha conseguido ya resultados importantes a este respecto [BeMa], a saber, las propiedades del diámetro dos y Daugavet son equivalentes en los preduales de los JBW*-triples. En [BeRo9], utilizando las teoría de centralizador de espacios de Banach, damos una amplia gama de espacios de Banach que satisfacen la propiedad de Daugavet, hasta ahora no concida y estudiamos cuando el tensor proyectivo de dos espacios de Banach tienen dicha propiedad. A raíz de los resultados ya obtenidos intentaremos avanzar en el problema planteado por V. Kadet, N. Kalton y D. Werner [KaKaWe], en buscar condiciones necesarias para que el tensor proyectivo de dos espacios de Banach tengan la propiedad de Daugavet. En lo referente a la propiedad del diámetro dos nuestros objetivos se centran en concluir el estudio de dicha propiedad en el tensor proyectivo e inyectivo de dos espacios de Banach. También nos planteamos los siguientes problemas:

1) ¿Un espacio de Banach transitivo no reflexivo, tiene alguna de las propiedades de diámetro dos?
2) Un espacio de Banach que no posea la propiedad de Radon-Nykodym, ¿se puede renormar equivalentemente satisfaciendo la propiedad del diámetro dos?
3) Caracterizar las C*-algebras que tienen la propiedad de que toda combinación convexa finita de slices de la bola unidad es un abierto débil relativo a la bola unidad.
4) Dados dos espacios de Banach con la propiedad de Daugavet, ¿tiene el tensor proyectivo de los mismos la propiedad de Daugavet?
5) Es sabido que la propiedad de Daugavet se hereda a subespacios de codimensión finita. ¿Qué clase de subespacios de un espacio de Banach con la propiedad de Daugavet heredan dicha propiedad?

Actividades a desarrollar:

Realizar una recopilación histórica donde se aborden todos los autores que han trabajado en los temas propuestos así como sus aportaciones. Intentar dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Objetivos matemáticos planteados
Recopilación histórica de la Teoría Espectral de Operadores
Demostración del Teorema de Riesz-Schauder
Demostración del Teorema espectral de operadores normales compactos en espacios de Hilbert
Recopilación histórica de los resultados fundamentales y demostración de los mismos, sobre la Propiedad de Daugavet y Propiedades de Diámetro dos.

Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:

W. Arverson, A short course on Spectral Theory , Graduate Text in Mathematics

209, Springer-Verlag (2002).
o K. Davidson, C*-algebras by example, Fields Inst. Monographs, Amer. Math. Soc. (1996).
o N. Dunford y J. Schwartz, Linear operators , vol. I, Interscience, New York (1958).
o R. V. Kadison, Fundamentals of the theory of operator algebras , vol. I, Academic Press (1983).
o G. K. Pedersen, C*-algebras and their automorphism groups, Academic Press (1979).
o C. Rickart, General theory of Banach Algebras , Van Nostrand, Princenton (1960).

- [BeLo] J. Becerra and G. López, Relatively weakly open subsets of the unit ball in function spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **315** (2006), 544-554.

- [BeLoRo] J. Becerra, G. López, and A. Rodríguez-Palacios, Relatively weakly open sets in closed balls of C*-algebras, *Journal of the London Mathematical Society* **68** (2003), 753-761.

- [BeLoPeRo] J. Becerra, G. López, A. M. Peralta, and A. Rodríguez-Palacios, Relatively weakly open sets in closed balls of Banach spaces, and real JB*-triples of finite rank, *Mathematische Annalen* **330** (2004), 45-58.

- [BeLoRu] J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A. Rueda Zoca, Big slices versus big relatively weakly open subsets in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 428 (2015), no. 2, 855–865.

- [BeLoRu1] J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A. Rueda Zoca, Extreme differences between weakly open subsets and convex combinations of slices in Banach spaces. *Adv. Math.* 269 (2015), 56–70.

- [BeLoRu2] J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A. Rueda Zoca, Octahedral norms and convex combination of slices in Banach spaces. *J. Funct. Anal.* 266 (2014), no. 4, 2424–2435.

- [BeMa] J. Becerra and M. Martín, The Daugavet property of C*-algebras, JB*-triples, and of their isometric preduals, *Journal of Functional Analysis* **224** (2005), 316-337.

- [BeRo9] J. Becerra and A. Rodríguez-Palacios, Banach space with the Daugavet property, and the centralizer, *J. Funct. Anal.*, **254** (2008), 2294-2302.

- [GGMS] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer, Some topological and geometrical structures in Banach spaces, Mem. Amer. Math. Soc. 70 (1987), no. 378, iv+116. MR 912637

- [KaKaWe] V. Kadets, N. Kalton and D. Werner, Remars on rich subspaces of Banach spaces, *Studia Math*. **159** (2003), 195-206.

- [Sh] R. V. Shvydkoy, Geometric aspects of the Daugavet property, *Journal of Functional Analysis* **176** (2000), 198-212.

Firma del responsable de tutorización

En, Granada, a 9 de Mayo de 2021