



**Propuesta de Trabajo Fin de Grado del Doble Grado en Física y Matemáticas  
(curso 2021-2022)**

*Responsable de tutorización:* Miguel Sánchez Caja

*Departamento:* Geometría y Topología

*Área de conocimiento:* Geometría Diferencial

*Responsable de cotutorización:*

*Departamento:*

*Área de conocimiento:*

*(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)*

*Estudiante que propone el trabajo:* Mónica Tapia del Moral

*Título:* Geometría de Finsler y sus aplicaciones a Relatividad General

*Número de créditos:*  6 ECTS  12 ECTS

*Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):*

- 1. Revisiones y/o trabajos bibliográficos sobre el estado actual de aspectos específicos relacionados con la titulación
- 2. Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática de la titulación, a partir del material disponible en los centros
- 3. Trabajos experimentales, de toma de datos de campo, de laboratorio, etc.
- 4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
- 5. Elaboración de un informe o un proyecto en el ámbito del grado de naturaleza profesional
- 6. Trabajos relacionados con las prácticas externas

*Descripción y resumen de contenidos:*

La Geometría de Finsler es una generalización de la Geometría Riemanniana en la cual, en vez de usarse un producto escalar en cada punto del espacio, se usa una norma. Esa Geometría tiene multitud de aplicaciones a campos distintos y, en el presente trabajo, se considerarán dos tipos distintos de aplicaciones. La primera es técnica. La causalidad del espaciotiempo es invariante conforme y, en casos muy relevantes, la información de toda la clase conforme queda codificada con precisión en una métrica finsleriana. La segunda afecta a los fundamentos de la Relatividad ya que recientemente se han propuesto modificaciones de carácter finsleriano a las métricas relativistas con el objetivo de resolver problemas cosmológicos conocidos.

*Actividades a desarrollar:*

1. Estudio preliminar de normas de Minkowski y del concepto de variedad de Finsler.
2. Estudio preliminar de la causalidad de espaciotiempos relativistas.
3. Aplicación de la Geometría de Finsler a la Relatividad General clásica.
4. Extensiones finslerianas de la Relatividad.

### *Objetivos planteados*

1. Propiedades elementales de normas de Minkowski, incluyendo: (a) relación de la convexidad de la esfera unidad con la desigualdad triangular, (b) caracterización de su compatibilidad con un producto escalar en términos de la diferenciabilidad de su cuadrado en el origen.
2. Demostrar cómo una hipersuperficie espacial de un espaciotiempo estacionario estándar es de Cauchy si y sólo si una cierta métrica finsleriana asociada es completa.
3. Describir algunas posibles extensiones de la Relatividad Especial y General usando elementos finslerianos.

### ***Bibliografía***

A. C. Thompson. “Minkowski Geometry”. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

D. Bao, S.-S. Chern, Z. Shen. “An Introduction to Riemann-Finsler Geometry”. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

E. Caponio, M. A. Javaloyes, M. Sánchez. On the interplay between Lorentzian causality and Finsler metrics of Randers type. *Rev. Mat. Iberoam.* 27 (2011) no. 3, 919–952.

Gibbons, G.W.; Gomis, J.; Pope, C.N. General very special relativity is Finsler geometry. *Phys. Rev. D* (2007) 76, 081701.

“Finsler Modification of Classical General Relativity”. Special Issue of the journal *Universe*, Ed. V. Perlick (2020). ISSN 2218-1997.

Firma del estudiante  
(solo para trabajos propuestos por alumnos)  
Mónica Tapia del Moral

Firma del responsable de tutorización  
Miguel Sánchez Caja

En Granada, a 12 de mayo de 2021