Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022-2023)

Tutor/a: **Antonio M. Peralta** *Departamento:* **Análisis Matemático** *Área de conocimiento:* **Análisis Matemático**
Cotutor/a: *Departamento:* *Área de conocimiento:*
(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un alumno/a) *Alumno/a que propone el trabajo:*

Título del trabajo: Introducción al problema de Tingley

Descripción, resumen de contenidos y actividades a desarrollar:

El Teorema de Mazur-Ulam afirma que toda isometría sobreyectiva entre espacios normados reales es una transformación afín. Este resultado, establecido en 1932, tiene un gran número de aplicaciones en materias ya estudiadas en el grado en Matemáticas. Es probable que los alumnos tengan alguna referencia previa a este resultado. En 1972, P. Mankiewicz demostró que toda aplicación que lleve isométricamente un abierto conexo de un espacio normado real X sobre un abierto de otro espacio normado real Y admite una extensión a una isometría (afín) y sobreyectiva de X en Y. Este resultado afirma que no es necesario tener una isometría sobreyectiva entre la totalidad de los espacios X e Y para identificar estos espacios normados mediante una trasformación afín, es suficiente con una identificación isométrica de las respectivas bolas unidad cerradas.

Una de las variantes más recientes del Teorema de Mazur-Ulam se debe a un resultado obtenido por D. Tingley en 1987. Supongamos que S_X representa la esfera unidad de un espacio normado X. El conocido como Problema de Tingley pregunta cuando una isometría sobreyectiva $F: S_X \to S_Y$ puede ser extendida a una isometría lineal real de X en Y.

El objetivo de este TFG es permitir que el alumno se familiarice con algunas de las respuestas positivas que el problema de Tignley admite para ciertos espacios de Banach clásicos.

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Cálculo I y II, Análisis Matemático I y II, Topología I, Análisis Funcional

Nivel de dificultad estimado (bajo, medio, alto o gradual según objetivos): Gradual y adaptable por objetivos, niveles entre medio y alto.

Objetivos planteados *(añadir cuando se considere oportuno una estimación del nivel de dificultad)*	
Objetivo	*Nivel de dificultad*
Teorema de Mazur-Ulam.	Medio-bajo
Problema de Tingley para espacios de sucesiones.	medio-alto
Problema de Tingley para álgebras de funciones continuas.	medio-alto
Problema de Tingley para espacios de funciones medibles.	alto, avanzado

Bibliografía:

- John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.
- Joram Lindenstrauss, Lior Tzafriri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- D. Tan, Extension of isometries on unit sphere of L^∞, *Taiwanese J. Math.* **15**, 819-827 (2011).
- D. Tan, Extension of isometries on the unit sphere of L^p-spaces, *Acta. Math. Sin.* (Engl. Ser.) **28**, 1197-1208 (2012).
- D. Tingley, Isometries of the unit sphere, *Geom. Dedicata*, **22**, 371-378 (1987).
- R.S. Wang, Isometries between the unit spheres of $C_0(\Omega)$ type spaces, *Acta Math. Sci.* (English Ed.) **14**, no. 1, 82-89 (1994).
- X. Yang, X. Zhao, On the extension problems of isometric and nonexpansive mappings. In: *Mathematics without boundaries*. Edited by Themistocles M. Rassias and Panos M. Pardalos. 725-748, Springer, New York, 2014.

Granada, 08 de Mayo de 2022