Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2022-2023)

Tutor/a: **Antonio M. Peralta**
Departamento: **Análisis Matemático**
Área de conocimiento: **Análisis Matemático**

Cotutor/a:
Departamento:
Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un alumno/a)
Alumno/a que propone el trabajo: Alberto López Molina

Título del trabajo: Aplicaciones lineales que preservan ortogonalidad entre espacios de Hilbert

Descripción, resumen de contenidos y actividades a desarrollar:

En un espacio de Hilbert real o complejo, H, dos elementos x e y son ortogonales en el sentido Euclídeo ($x\perp y$) si su producto interno es cero, es decir, $(x|y)=0$. Es bien conocido que toda isometría lineal entre dos espacios de Hilbert preserva productos escalares y por tanto envía elementos ortogonales a elementos ortogonales. Sea $T: H_1 \to H_2$ una aplicación entre dos espacios de Hilbert. Diremos que T preserva ortogonalidad si $x\perp y \Rightarrow T(x)\perp T(y)$. Cuando la ortogonalidad entre los vectores x e y en H_1 es equivalente a la ortogonalidad entre sus imágenes T(x) y T(y), decimos que T preserva ortogonalidad en ambas direcciones o que preserva ortogonalidad fuertemente. Lo primero es notar que existen aplicaciones no lineales que preservan ortogonalidad, y lo segundo que la aplicación nula preserva ortogonalidad.

El primer objetivo será identificar y describir las aplicaciones lineales no nulas que preservan (fuertemente) ortogonalidad entre espacios de Hilbert. Posteriormente identificar algunas aplicaciones de este resultado por ejemplo en la compatibilidad de varios productos escalares que comparten los mismos elementos ortogonales.

Un objetivo mucho más ambicioso, y más difícil, consistirá en el estudio de las aplicaciones lineales non nulas entre espacios de Hilbert que preservan ortogonalidad de forma aproximada, es decir, aplicaciones lineales $T: H_1 \to H_2$ verificando que para un determinado ε en $[0,1)$ la condición $x\perp y$ implica que $|(T(x)|T(y))| \leq \varepsilon\, \|x\|_2\, \|y\|_2$. Aplicaciones de este resultado para estudiar la estabilidad de los preservadores de ortogonalidad. Este segundo objetivo será considerado sólo si la propuesta es de dificultad alta.

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Cálculo I y II, Análisis Matemático I y II, Topología I, Análisis Funcional

Nivel de dificultad estimado (bajo, medio, alto o gradual según objetivos): Gradual y adaptable por objetivos, niveles entre medio y alto.

Objetivos planteados *(añadir cuando se considere oportuno una estimación del nivel de dificultad)*	
Objetivo	*Nivel de dificultad*
Estudio de las aplicaciones lineales no nulas que preservan (fuertemente) ortogonalidad entre espacios de Hilbert.	alta
Estudio de las aplicaciones lineales non nulas entre espacios de Hilbert que preservan ortogonalidad de forma aproximada.	alta, avanzada
Aplicaciones al problema de estabilidad de preservadores de ortogonalidad.	Alta

Bibliografía:

- F. Cabello Sánchez, The singular case in the stability of additive functions, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002) 498–516.
- F. Cabello Sánchez, J.M.F. Castillo, Banach space techniques underpinning a theory for nearly additive mappings, Dissertationes Math. (2002), 404.
- J. Chmielinski, Linear mappings approximately preserving orthogonality, J. Math. Anal. Appl. 304, no. 1 (2005), 158--169.
- A. Koldobsky, Operators preserving orthogonality are isometries, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123 (1993) 835–837.
- V. Pambuccian, A logical look at characterizations of geometric transformations under mild hypotheses, Indag. Math. (N.S.) 11 (2000) 453–462.
- J. Rätz, Comparison of inner products, Aequationes Math. 57 (1999) 312–321.
- A. Tissier, A right-angle preserving mapping (a solution of a problem proposed in 1983 by H. Kestelman), Advanced Problem 6436, Amer. Math. Monthly 92 (1985) 291–292.

Granada, 08 de mayo de 2022

Antonio M. Peralta

Alberto