



Propuesta de Trabajo Fin de Grado del Doble Grado en Física y Matemáticas (curso 2022-2023)

Responsable de tutorización: Miguel Sánchez Caja

Departamento: Geometría y Topología

Área de conocimiento: Geometría Diferencial

Responsable de cotutorización:

Departamento:

Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)

Estudiante que propone el trabajo:

Título: Completitud geodésica y singularidades

Número de créditos: 6 ECTS 12 ECTS

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

- 1. Revisiones y/o trabajos bibliográficos sobre el estado actual de aspectos específicos relacionados con la titulación
- 2. Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática de la titulación, a partir del material disponible en los centros
- 3. Trabajos experimentales, de toma de datos de campo, de laboratorio, etc.
- 4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
- 5. Elaboración de un informe o un proyecto en el ámbito del grado de naturaleza profesional
- 6. Trabajos relacionados con las prácticas externas

Descripción y resumen de contenidos:

El teorema de Hopf-Rinow es un resultado básico en Geometría Riemanniana que, entre otras consecuencias, muestra la equivalencia de la completitud geodésica y métrica, así como la completitud de toda variedad riemanniana compacta. Cuando se consideran métricas de signatura lorentziana, como en el caso de la Relatividad General, ninguna de las implicaciones de este teorema se mantiene y, en particular, se conoce la existencia de ejemplos compactos e incompletos, el primero de los cuales fue el toro de Clifton-Pohl.

Esto da lugar a implicaciones relativistas interesantes. De hecho, el célebre teorema de singularidades de R. Penrose (por el cual resultó galardonado con un Premio Nobel de Física en 2020) demuestra exclusivamente la incompletitud geodésica luminosa del espaciotiempo.

En el presente TFG se estudiarán estas cuestiones, completando la formación del estudiante para poder desarrollar los resultados geométricos citados y ahondar en las interpretaciones relativistas.

Actividades a desarrollar:

1. Estudio de complementos de Geometría Riemanniana.

2. Exposición detallada de un teorema clásico en esta geometría.
3. Exposición detallada de un contraejemplo básico en Geometría Lorentziana.
4. Estudio y discusión de algunas interpretaciones relativistas.

Objetivos planteados

1. Enunciar y demostrar el teorema de Hopf-Rinow.
2. Construir un toro lorentziano geodésicamente incompleto.
3. Discutir el concepto de singularidad en Relatividad General y las implicaciones para ella de los resultados en los objetivos anteriores.

Bibliografía

- 1.- Do Carmo, Manfredo Perdigão: *Riemannian geometry*. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1992).
- 2.- Garfinkle, D.; Senovilla, J. M. M.: The 1965 Penrose singularity theorem. *Class. Quantum Grav.*, 32 (12): 124008 (2015).
- 3.- Geroch, Robert: What is a singularity in general relativity? *Annals of Physics*. Volume 48, Issue 3, July (1968) 526-540.
- 4.- O'Neill, Barrett: *Semi-Riemannian geometry*. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York (1983).
- 5.- Wald, Robert M: *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL (1984)..

Firma del estudiante
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del responsable de tutorización
Miguel Sánchez Caja

En Granada, a 6 de mayo de 2022