Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021-2022)

Responsable de tutorización: Lorenzo Luis Salcedo Moreno
Departamento: Física atómica molecular y nuclear
Correo electrónico: salcedo@ugr.es

Responsable de cotutorización:
Departamento:
Correo electrónico:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)
Estudiante que propone el trabajo:

Título del trabajo: Conjetura sobre la conexión geométrica de las ecuaciones de Schwinger-Dyson

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

- [ ] Complementario de profundización
- [ ] Divulgación de las Matemáticas
- [ ] Docencia e innovación
- [ ] Herramientas informáticas
- [x] Iniciación a la investigación

Materias del grado relacionadas con el trabajo:
VARIABLE COMPLEJA I y II
ANÁLISIS VECTORIAL
PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Descripción y resumen de contenidos:

Dada una densidad de probabilidad ρ en R^n, el valor esperado de un observable f se define integrando ρf sobre R^n y puede obtenerse haciendo un muestreo con Monte Carlo. Pero Monte Carlo no es aplicable cuando la distribución ρ es compleja. El método de Langevin complejo (CL) intenta resolver este problema para ρ holomorfa yendo a la variedad compleja C^n extendiendo analíticamente los observables. Una condición necesaria para un muestreo correcto es que se anule el valor esperado de $(\partial+v)f$ (siendo $v= \partial\rho/\rho$) para f arbitrario (ecuaciones de Schwinger-Dyson, SDE). Sin embargo SDE no es suficiente. Si Σ es una variedad n-dimensional en C^n tal que ρ se anula en $\partial\Sigma$ (siendo $\Sigma=R^n$ un caso particular) integración de $\rho(z)f(z)$ sobre Σ produce una solución de SDE. En [1] se conjeturó que combinaciones lineales de soluciones asociadas a Σ's era la solución más general, y la conjetura se demostró en [2] para el caso n=1, donde también se analizan múltiples ejemplos.
El método CL se basa en un proceso markoviano de tipo browniano en C^n modificable mediante la introducción de un kernel G (holomorfo). Cuando la distribución estacionaria obtenida converge suficientemente en el infinito se satisface la llamada ecuación de Fokker-Planck (FP) que implica una versión más débil que SDE, a saber, que se anule el valor esperado de $(\partial+v)G\partial f$ para f arbitrario.

Actividades a desarrollar:

Familiarizarse con estas ideas, siendo muy conveniente tener la posibilidad de hacer simulaciones numéricas simples como ayuda para formular conjeturas verosímiles. En [2] se estudiaron soluciones de SDE en n=1. Hay un amplio margen para estudiar 1) nuevas soluciones y casos particulares no analizados en [2], así como 2) el efecto del kernel al imponer sólo FP (en [1] se muestra que puede introducir nuevas soluciones si G tiene ceros), y 3) también la formulación precisa y verificación de la conjetura para n>1, al menos en casos particulares.

Si N_SDE es el número de soluciones de SDE y N_Γ el número de sábanas Σ inequivalentes, obviamente N_Γ ⩽ N_SDE (ya que cada sábana produce una solución); la conjetura es la igualdad. Incluso una formulación precisa de N_SDE y N_Γ para n>1 parece extraordinariamente difícil en toda generalidad pero debe ser posible para familias de distribuciones holomorfas ρ concretas.

Objetivos matemáticos planteados (por orden de interés)
Intentar una formulación precisa de la conjetura N_Γ = N_SDE y su verificación o refutación para n>1, al menos para familias adecuadas de distribuciones complejas (por ejemplo ρ separable)
Estudiar el efecto del kernel en n=1
Completar el estudio de SDE en n=1 presentado en [2]

Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:

[1] L.L. Salcedo,
Spurious solutions of the complex Langevin equation,
Physics Letters B 305 (1993) 125-130

[2] L. L. Salcedo, E. Seiler,
Schwinger–Dyson equations and line integrals,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 52 (2019) 3, 035201

Otras referencias (si procede):

Firma del responsable de tutorización

En Granada, a 18 de mayo de 2021