



## Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021-2022)

*Responsable de tutorización:* Mikael Chala  
*Departamento:* Física Teórica y del Cosmos  
*Correo electrónico:* mikael.chala@ugr.es

*Responsable de cotutorización:*  
*Departamento:*  
*Correo electrónico:*

*Estudiante que propone el trabajo:* Rubén Fernández Jurado

*Título del trabajo:* Mecánica hamiltoniana en variedades

*Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):*

- Complementario de profundización
- Divulgación de las Matemáticas
- Docencia e innovación
- Herramientas informáticas
- Iniciación a la investigación

*Materias del grado relacionadas con el trabajo:*

Cálculo; Geometría; Física General; Topología; Análisis Matemático; Modelos Matemáticos; Mecánica; Ecuaciones Diferenciales; Análisis vectorial; Álgebras, Grupos y Representaciones; Variedades Diferenciables.

*Descripción y resumen de contenidos:*

El formalismo de la mecánica hamiltoniana es la piedra angular de la física clásica, y, en buena medida, está también en la base de la mecánica cuántica. Por otro lado, el estudio de los sistemas hamiltonianos hace uso intensivo de distintos métodos y conceptos de varias áreas de las matemáticas, entre otros: ecuaciones diferenciales, geometría diferencial en variedades, grupos y álgebras de Lie, variedades simplécticas o ergodicidad.

El objetivo de este trabajo es introducir rigurosamente el formalismo matemático de la mecánica hamiltoniana, demostrar algunos de los principales teoremas en este contexto e interpretarlos físicamente.

*Actividades a desarrollar:*

- Introducir el concepto de sistema hamiltoniano como caso particular de variedad simpléctica; y estudiar en qué medida el formalismo engloba también el concepto de sistema lagrangiano.

- Enunciar y demostrar algunos de los principales resultados en mecánica hamiltoniana, *e.g.* el teorema de Darboux (sobre 2-formas exactas y su conexión con transformaciones canónicas), los teoremas de Liouville (sobre la conservación del volumen del espacio de fases) y Poincaré (sobre

recurrencia de curvas) o el teorema de Noether (sobre la relación entre simetrías y cantidades conservadas).

- Estudiar las cantidades conservadas de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton.

*Objetivos matemáticos planteados*

Aprender (o profundizar en) conceptos matemáticos tales como variedades diferenciables, p-formas o grupos y álgebras de Lie.

Entender rigurosamente la equivalencia entre los formalismos lagrangiano y hamiltoniano de la mecánica.

Comprender cómo distintas preguntas sobre la naturaleza de los sistemas mecánicos dan lugar al desarrollo de nuevos conceptos matemáticos y sus propiedades.

Comprender la importancia de las simetrías en el estudio de los sistemas físicos y su representación matemática.

Si el tiempo lo permite, conocer las matemáticas fundamentales de la física cuántica (espacios de Hilbert, operadores lineales y sus espectros), y su conexión con la mecánica hamiltoniana a través del proceso de cuantización.

*Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:*

[1] “Foundations of mechanics”; Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden; Addison-Wesley Publishing Company, 1987.

[2] “Mathematical methods of classical mechanics”; V.I. Arnold; Springer-Verlag; 1991.

Firma del estudiante  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de tutorización  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)



Firma del responsable de cotutorización  
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

En Granada, a 18 de mayo de 2021