Propuesta de Trabajo Fin de Grado del Doble Grado en Física y Matemáticas (curso 2020-2021)

Responsable de tutorización: Ignacio Luis Ruiz Simo
Departamento: Física Atómica, Molecular y Nuclear
Área de conocimiento: Física Atómica, Molecular y Nuclear

Responsable de cotutorización: Lorenzo Luis Salcedo Moreno
Departamento: Física Atómica, Molecular y Nuclear
Área de conocimiento: Física Atómica, Molecular y Nuclear

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)
Estudiante que propone el trabajo:

Título: Estudio comparativo de analogías y diferencias entre los grupos de Lie SU(2) y SU(3)

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

☒ 1. Revisiones y/o trabajos bibliográficos sobre el estado actual de aspectos específicos relacionados con la titulación
☒ 2. Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática de la titulación, a partir del material disponible en los centros
☐ 3. Trabajos experimentales, de toma de datos de campo, de laboratorio, etc.
☐ 4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
☐ 5. Elaboración de un informe o un proyecto en el ámbito del grado de naturaleza profesional
☐ 6. Trabajos relacionados con las prácticas externas

Descripción y resumen de contenidos:
Los grupos de Lie son grupos continuos que definen una variedad topológica, por tanto localmente sus elementos se pueden caracterizar unívocamente por un número finito de parámetros reales que varían de forma continua. A menudo un grupo de Lie puede caracterizarse como el conjunto de transformaciones invertibles que deja invariante alguna propiedad matemática. Por ejemplo, el grupo de transformaciones lineales en R^3 que deja invariante la propiedad de ser una base ortonormal positiva de R^3 forma el grupo de rotaciones SO(3) y consiste en (es isomorfo al grupo de) todas aquellas matrices reales 3x3, ortogonales y de determinante 1, siendo la operación de grupo la multiplicación matricial. De manera análoga, el grupo SU(2) (íntimamente relacionado con SO(3)) consiste en todas aquellas matrices 2x2 unitarias de determinante 1; actuando sobre vectores de C^2 dejan invariante el producto escalar en C^2. Igualmente, el grupo SU(3) lo forman el conjunto de transformaciones lineales unitarias de determinante 1 en el espacio vectorial tridimensional C^3 sobre los números complejos. Los grupos SO(n) y SU(n) son grupos de orden infinito (para valores no triviales de n) pero compactos por lo que comparten propiedades matemáticas con los grupos finitos lo cual facilita grandemente se estudio (teorema de Peter-Weyl). Los grupos de Lie son de extraordinario interés en física ya que el conjunto de transformaciones invertibles de un sistema físico forma el grupo de simetría del sistema y los grupos de Lie aparecen como subgrupos de éste. Los grupos unitarios, tales como SU(2) y SU(3), son especialmente importantes en teorías cuánticas, para la clasificación de los tipos de simetría (representaciones irreducibles) admisibles en el sistema cuántico.

Actividades a desarrollar:

En este trabajo se pretende que el alumno haga una comparación de analogías y diferencias entre los grupos SU(2) y SU(3), es decir, que sea capaz de entender bien las propiedades principales de uno de ellos, el más sencillo SU(2), y que estudiando bibliografía especializada sobre SU(3) sea capaz de interpretar adecuadamente cuáles son los elementos y características comunes a ambos grupos de simetría y poder expresar y entender cuáles son las generalizaciones que conectan uno con otro.

A modo de sugerencia, se propone que el estudiante lleve a cabo algunas de las siguientes tareas: estudiar las diferencias entre las representaciones irreducibles de ambos grupos; determinar cuántos números cuánticos (valores propios de operadores que actúan en alguna representación irreducible de dimensión finita del grupo) son necesarios en cada caso para etiquetar unívocamente cada uno de los vectores propios en esa representación; estudiar los operadores de Casimir que identifican cada representación irreducible; obtener productos directos de representaciones irreducibles y saber descomponerlos en suma de representaciones irreducibles del grupo en cuestión (serie de Clebsch-Gordan); calcular algunos coeficientes de Clebsch-Gordan sin recurrir a tablas y entender las tablas posteriormente; estudiar el teorema de Wigner-Eckart en SU(2) y entender su generalización a SU(3); estudiar y comparar el álgebra de Lie de los generadores infinitesimales de cada grupo de simetría; hacer un estudio detallado y diferenciado de las representaciones irreducibles más relevantes en campos como la física de partículas elementales: representaciones fundamentales y adjuntas; entender y saber aplicar los operadores escalera (raising and lowering operators) para obtener todos los vectores propios de una representación a partir de aquél con el peso (autovalor) más alto; deducir propiedades de simetría y antisimetría de vectores propios de representaciones irreducibles en términos del producto tensorial de representaciones irreducibles idénticas: tableros de Young, etc.

Objetivos planteados
Estudio y caracterización de representaciones irreducibles de SU(2) y SU(3) (nivel de dificultad medio-alto)
Descomposición de Clebsch-Gordan de productos directos de representaciones irreducibles (nivel de dificultad medio-alto)
Cálculo (*ab initio*) de coeficientes de Clebsch-Gordan para expresar los vectores propios de algunas representaciones irreducibles en función de productos tensoriales de vectores propios de otras representaciones irreducibles (para los casos más sencillos) (nivel de dificultad medio).
Teorema de Wigner-Eckart (entender la demostración y su utilidad) (nivel de dificultad alto)
Entender y aplicar operadores escalera para “moverse” entre los vectores de una determinada representación (conectado también con el cálculo de coeficientes de Clebsch-Gordan) (nivel de dificultad medio)
Uso de tableros de Young (nivel de dificultad alto)

Bibliografía

Para teoría de grupos y representaciones:

- Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction, Brian C. Hall, Editorial Springer.
- Group Theory and Its Application to Physical Problems, Morton Hamermesh, Dover Publications Inc.
- Quantum Mechanics: Symmetries, Walter Greiner y Berndt Müller, Springer.

Para el estudio de las propiedades del grupo SU(2):

- Angular Momentum in Quantum Mechanics, A.R. Edmonds, Princeton University Press.
- Elementary Theory of Angular Momentum, M.E. Rose, John-Wiley & sons, Inc.

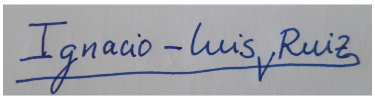
Para el estudio de las propiedades del grupo SU(3):

- Quantum Mechanics: Symmetries, Walter Greiner y Berndt Müller, Springer.
- The Octet Model and its Clebsch-Gordan coefficients, J.J. de Swart, Reviews of Modern Physics 35 (1963), 916-939. Erratum: Reviews of Modern Physics 37, (1965), 326.

Otras referencias (si procede):

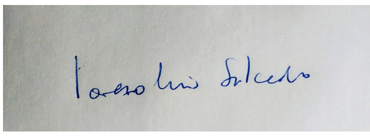
- Dynamical Symmetry in Particle Physics, A. Pais, Reviews of Modern Physics 38 (1966), 215-255.
- Irreducible Representations of the SU_3 group, V.B. Mandel'tsveig, Soviet Physics JETP 20, (1965), 1237-1243.

Recomendaciones:
Es altamente recomendable que el alumno tenga conocimientos de teoría de grupos.



Firma del estudiante
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del responsable de tutorización



Firma del responsable de cotutorización *(en su caso)*

En Granada, a 8 de junio de 2020