Propuesta de Trabajo Fin de Grado del Doble Grado en Física y Matemáticas (curso 2020-2021)

Responsable de tutorización: Miguel Cabrera García *Departamento: Análisis Matemático* *Área de conocimiento: Análisis Matemático*
Responsable de cotutorización: Antonio Moreno Galindo *Departamento: Análisis Matemático* *Área de conocimiento: Análisis Matemático*
(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante) *Estudiante que propone el trabajo:* Sergio Ken Pozuelo Morimoto

Título: Formulación algebraica de la Mecánica Cuántica

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

X1. Revisiones y/o trabajos bibliográficos sobre el estado actual de aspectos específicos relacionados con la titulación
X2. Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática de la titulación, a partir del material disponible en los centros
3. Trabajos experimentales, de toma de datos de campo, de laboratorio, etc.
4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
5. Elaboración de un informe o un proyecto en el ámbito del grado de naturaleza profesional
6. Trabajos relacionados con las prácticas externas

Descripción y resumen de contenidos:

Heisenberg en 1925 y Schrödinger en 1926 publicaron artículos en los que proponían, con puntos de vista aparentemente diferentes, formulaciones equivalentes para las reglas de cuantificación empírica de Bohr y Sommerfeld. Estas reglas se habían desarrollado a partir de los datos experimentales acumulados en las dos décadas anteriores que indicaban una estructura atómica y subatómica que no se ajustaba a las reglas aceptadas de la mecánica newtoniana clásica. La necesidad de unificar estas dos teorías pre-cuánticas, que originalmente se conocían como mecánica matricial y mecánica de ondas, se encuentra en la base de la formulación de Dirac [3] (1930) de los principios de mecánica cuántica, cuya coherencia y refinamiento matemáticos se deben a von Neumann [10] (1932). Los principios resultantes se conocieron como los axiomas de la mecánica cuántica de Dirac–von Neumann. Esta teoría difiere radicalmente de todas las teorías mecánicas anteriores en la medida en que tiene una interpretación probabilística y, por lo tanto, reemplaza el determinismo clásico por una filosofía de indeterminismo.

La teoría de las álgebras de operadores en espacios de Hilbert comenzó en la década de 1930 con una serie de trabajos de von Neumann y Murray–von Neumann. Las principales motivaciones de estos autores fueron la teoría de representación de grupos unitarios y ciertos aspectos del formalismo de la mecánica cuántica. Ellos analizaron con gran detalle la estructura de una familia de álgebras a las que hoy día conocemos como álgebras de von Neumann, o W*-álgebras. Estas álgebras tienen la propiedad distintiva de ser cerradas en la topología débil de operadores y no fue hasta 1943 que Gelfand y Naimark en [4] caracterizaron y analizaron parcialmente las álgebras de operadores que son cerradas para la topología de la norma, las llamadas C*-álgebras. Cuando se utiliza una C*-álgebra o un álgebra de von Neumann como modelo algebraico de la mecánica cuántica, únicamente es la parte autoadjunta del álgebra la que representa observables. La parte autoadjunta no es estable bajo el producto asociativo, mientras que sí lo es bajo el producto simetrizado. Esta es la razón por la que Jordan propuso en [5] (1933) modelar la mecánica cuántica a través de las hoy día conocidas como álgebras de Jordan. La idoneidad de este enfoque se ve corroborada por el hecho de que muchas propiedades físicamente relevantes de los observables están adecuadamente descritas por la estructura Jordan. Un año más tarde, Jordan, von Neumann y Wigner en [6] (1934) introducen las álgebras de Jordan formalmente reales y describen las de dimensión finita. Sin duda, este artículo puede ser considerado como el punto de partida de las teorías no-asociativas de las H*-álgebras y de las C*-álgebras. En el intento de eliminar la condición de finita dimensión impuesta en [6], y de axiomatizar la mecánica cuántica suponiendo que el espacio vectorial de los observables está dotado con un cálculo funcional adecuado (esto último ya estaba presente en el artículo de von Neumann [11]) Segal considera en [12] (1943) el espacio vectorial de los observables dotado con una norma a la que exige convenientes axiomas. Sin embargo, el nacimiento de la C*-teoría no-asociativa, tal y como la conocemos hoy en día, data de 1970, cuando, en la última sección de su monografía [7], Kaplansky diseña las líneas básicas de investigación en JB-álgebras, JB*-álgebras, y C*-álgebras alternativas.

Ocho años después de la publicación de [7], Alfsen, Shultz y Størmer introdujeron los conceptos (no-espaciales) de JB-algebra y de JBW-algebra en [1] (1970), generalizando así los trabajos previos de Jordan, von Neumann y Wigner [6] y [11]. Las JB*-álgebras fueron introducidas por Kaplansky en su conferencia de clausura del 1976 St. Andrews Colloquium of the Edinburgh Mathematical Society y fueron estudiadas en primer lugar por Wright [13] (1977), quien probó la existencia de una correspondencia biyectiva entre las JB-álgebras y las JB*-álgebras. Un modelo no-asociativo que generaliza a las C*-álgebras (de hecho, a las JB*-álgebras no-conmutativas), y que es mucho más reciente, es el constituido por los JB*-triples. Éstos fueron introducidos por Kaup en sendos artículos [8] (1977) y [9] (1983) con el propósito de extender a dimensión infinita los trabajos previos de clasificación de dominios en C^n. La referencia fundamental para el desarrollo de los modelos no-asociativos de las C*-álgebras será el libro [2].

Actividades a desarrollar: Presentar de manera ordenada y lo más autocontenida posible los siguientes temas:

Operadores lineales y continuos en espacios de Hilbert.

C*-álgebras y W*-álgebras.

Operadores compactos, operadores de Hilbert-Schmidt, y operadores clase-traza.

Postulados de la Mecánica Cuántica.

Álgebras alternativas y álgebras de Jordan.

Álgebras de Jordan formalmente reales y JB-álgebras.

Otros modelos no-asociativos de las C*-álgebras.

Objetivos planteados
Presentar una reseña histórica del desarrollo de la Mecánica Cuantica
Exponer en detalle la fundamentación y el formalismo algebraico de la Mecánica Cuantica
Hacer una reseña de las generalizaciones no-asociativas de las C*-álgebras asociativas: JB-algebras, JB*-álgebras, C*-álgebras alternativas, JB*-álgebras no-conmutativas, y JB*-triples
Aprender a gestionar bibliografía

Iniciarse en investigación

Bibliografía

[1] **E. M. Alfsen, F. W. Shultz, and E. Størmer**, A Gelfand–Neumark theorem for Jordan algebras. *Adv. Math.* **28** (1978), 11–56.

[2] **M. Cabrera and A. Rodríguez,** *Non-associative normed algebras. Volume 1: The Vidav-Palmer and Gelfand-Naimark Theorems, and Volume 2: Representation Theory and the Zel'manov Approach*. Encyclopedia Math. Appl. **154** and **167**. Cambridge University Press, 2014 and 2018.

[3] **P. A. M. Dirac**, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1930.

[4] **I. M. Gelfand and M. A. Naimark,** On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Mat. Sbornik* **12** (1943), 197–213.

[5] **P. Jordan,** Über Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1933), 209–217.

[6] **P. Jordan, J. von Neumann, and E. Wigner,** On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. of Math.* **35** (1934), 29–64.

[7] **I. Kaplansky,** *Algebraic and analytic aspects of operator algebras*. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **1**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.

[8] **W. Kaup,** Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds. *Math. Ann.* **228** (1977), 39–64.

[9] **W. Kaup,** A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces. *Math. Z.* **183** (1983), 503–29.

[10] **J. von Neumann,** *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1932.

[11] **J. von Neumann,** On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Mat. Sbornik* **1** (1936), 415–482.

[12] **I. E. Segal,** Postulates for general quantum mechanics. *Ann. Math.* **48** (1947), 930–948.

[13] **J. D. M. Wright,** Jordan C*-algebras. *Michigan Math. J.* **24** (1977), 291–302.

Bibliografía Adicional

E. M. Alfsen and F. W. Shultz, *State Spaces of Operator Algebras. Basic theory, orientations and C*-products.* Mathematics:Theory and Applications. Birkhäuser Boston, 2001.

E. M. Alfsen and F. W. Shultz, *Geometry of state spaces of operator algebras.* Mathematics: Theory and Applications. Birkhäuser Boston, 2003.

J. Blank, P. Exner, and M. Havlicek, *Hilbert Space Operators in Quantum Physics.Theoretical and*

Mathematical Physics, Springer Science, Second Edition 2008.

O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. Volume 1: C*- and W*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States, and Volume 2: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanies*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1997.

G. Dell'Antonio, *Lectures on the Mathematics of Quantum Mechanics I*. Atlantis Press, 2015.

R. S. Doran and V. A. Belfi, *Characterizations of C*-algebras: The Gelfand–Naimark theorems*. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. **101**, Marcel Dekker, New York– Basel, 1986.

S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics.* Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

H. Hanche-Olsen and E. Størmer, *Jordan operator algebras*. Monographs and Studies in Mathematics **21**, Pitman, Boston, 1984.

G. J. Murphy, *C*-algebras and operator theory*. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

Á. Rodríguez and M. Cabrera, Non-associative C*-algebras, *Enciclopedia in Algebra and Applications. Chapter 4*. Edided by Abdelnacer Makhlouf. Wiley-Elservier, 2020.

G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics. With Applications to Schrödinger Operators*. Graduate Studies in Mathematics **99**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

Firma del estudiante
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del responsable de tutorización

Firma del responsable de cotutorización *(en su caso)*

En Granada, a de de 2020