Enigma Nº 2 — Solución

La respuesta es 1.325*. Para respuestas con más de tres decimales, se han ignorado todos del cuarto en adelante. Se acepta también* 1.326*, que se obtiene por redondeo.*

En 1861, el físico Joseph Plateau demostros que las superficies obtenidas con películas jabonosas bordeadas por alambres cerrados son mínimas, es decir, que tienen curvatura media cero en todos sus puntos. Estas superficies reciben este nombre porque, al menos en trocitos pequeños, minimizan el área entre las superficies con el mismo borde. Ya en 1744, Leonhard Euler encontró la superficie mínima de revolución (obtenida al girar una curva plana alrededor de una recta contenida en el mismo plano) que actualmente se llama catenoide. Es la superficie obtenida al girar la catenaria, que es la gráfica del coseno hiperbólico. Así, la catenoide está formada (siempre, salvo traslaciones y giros) por los puntos del espacio que cumplen la ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2}=\cosh(z).$$

También probó que las únicas superficies mínimas de revolución son el plano y las catenoides de ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2}=\lambda\cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right), \quad \lambda>0,$$

que no son sino homotecias de la anterior. Nos damos cuenta de que estas catenoides cortan al cilindro de radio 1 (de ecuación $x^2+y^2=1$) en dos círculos sólo cuando $\lambda<1$. En este enigma nos preguntaban por la distancia máxima entre estos dos círculos.

Observamos que para $\lambda=1$ no obtenemos dos círculos al cortar la catenoide y el cilindro, sino uno. Por continuidad, para valores λ próximos a 1 (y menores que 1) la distancia entre los círculos será próxima a cero. Conforme decrece el parámetro λ la distancia entre los círculos va creciendo hasta llegar a un máximo (que es lo que tenemos que calcular), y después empieza de nuevo a decrecer hasta que vuelve a ser cero para $\lambda=0$. Para los valores del parámetro λ entre 0 y 1 distintos de ese valor que nos da la distancia máxima, hay exactamente dos catenoides bordeadas por los mismos círculos: una que se realiza con película de jabón (en matemáticas, se dice que es estable) y otra de cuello más estrecho que nunca se realiza como película de jabón (inestable).

Como en los círculos en que se cortan la catenoide (para $0 < \lambda < 1$) y el cilindro se tiene que $x^2 + y^2 = 1$, entonces también se cumple $z = \lambda \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Por tanto, queremos calcular el máximo de la función

$$f(\lambda) = 2\lambda \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Para calcular los puntos críticos de esta función, resolvemos la ecuación $f'(\lambda) = 0$, y obtenemos como único valor (aproximado) $a_0 = 0.552434$. Por tanto, la distancia que buscábamos es (aproximadamente) $f(a_0) = \mathbf{1.32549}$.