Enigma 4 — Solución

La respuesta es

First Question: ventana 8, piso 4.
Second question: ventana 1, piso 4.

Este enigma se basa en un método muy curioso para comunicar la ventana que Ayman indica. Antes de describir el código que usa, vamos a ver el problema que resuelve.

Vamos a numerar las ventanas del 0 al 63, empezando por la de arriba a la izquierda, y siguiendo de izquierda a derecha y de arriba abajo. Carmen debe comunicar un número del 0 al 63 a Nassim, y para eso sólo puede cambiar el estado de una de las ventanas. Así que el problema consiste en encontrar una forma de dividir el espacio de configuraciones posibles del conjunto de ventanas en 64 partes, de forma que cualquiera de ellas sea accesible desde cualquier otra configuración cambiando sólo una ventana.

Esto puede hacerse de la siguiente forma: asociamos a cada ventana un elemento del espacio $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$, que tiene 64 elementos. Para hacer esta asociación, ordenamos los elementos en orden lexicográfico, como nos indica la conversación entre Carmen y Nassim:

$$\begin{array}{ccl} 0 & \equiv & (0,0,0,0,0,0) =: v_0 \\ 1 & \equiv & (0,0,0,0,0,1) =: v_1 \\ 2 & \equiv & (0,0,0,0,1,0) =: v_2 \\ 3 & \equiv & (0,0,0,0,1,1) =: v_3 \\ & & \vdots \end{array}$$

Esta asociación se obtiene fácilmente escribiendo en binario el número de la ventana.

Ahora debemos asociar a cada configuración de las ventanas un elemento de este espacio. Vemos cada posible configuración como un espacio de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{64}$, donde

0 indica que la ventana está cerrada, y 1 indica que está abierta. Por ejemplo, el elemento

$$e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$$

representa la configuración en que todas las ventanas están cerradas menos la primera (la 0), que está abierta. En general, definimos la configuración

$$e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

con el 1 en la posición $j + 1$ (correspondiente a la ventana j, ya que empezamos a numerar en el 0), que representa la configuración en que todas las ventanas están cerradas menos la j, que está abierta. Para asociar un elemento de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ a cada elemento de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{64}$ usamos la aplicación lineal f que cumple

$$f(e_j) := v_j, \qquad \text{para } j = 0, \ldots, 63.$$

Esta aplicación lineal está bien definida y es única porque $(e_0, e_1, \ldots, e_{63})$ forman una base de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{64}$, visto como espacio vectorial. Esta aplicación tiene la propiedad que necesitamos, porque dada cualquier ventana $x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ y cualquier configuración de ventanas $y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{64}$ podemos encontrar e_j tal que

$$f(y + e_j) = x.$$

De hecho, basta con tomar el único j tal que

$$v_j = x - f(y).$$

Siguiendo este sistema podemos contestar a las preguntas del enigma:

Para la primera, se trata de encontrar $f(x)$, donde x es

$$x = e_3 + e_4 + e_7 + e_{15} + e_{30} + e_{54},$$

ya que las ventanas 3, 4, 7, 15, 30 y 54 están abiertas. Tenemos

$$\begin{aligned}
f(e_3) &= (0, 0, 0, 0, 1, 1) \\
f(e_4) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
f(e_7) &= (0, 0, 0, 1, 1, 1) \\
f(e_{15}) &= (0, 0, 1, 1, 1, 1) \\
f(e_{30}) &= (0, 1, 1, 1, 1, 0) \\
f(e_{54}) &= (1, 1, 0, 1, 1, 0)
\end{aligned}$$

La suma de todos ellos, con la aritmética de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$, es

$$f(x) = (1, 0, 0, 1, 1, 1)$$

Este elemento es v_{39}, que corresponde a la ventana 39. Esta ventana es la 8 del piso 4.

Para la segunda pregunta, la configuración de ventanas es

$$x = e_3 + e_4 + e_{15} + e_{30} + e_{54},$$

y necesitamos encontrar un elemento e_j tal que

$$f(x + e_j) = v_8,$$

es decir

$$v_j = v_8 - f(x).$$

Como antes, podemos calcular

$$f(x) = (1, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Luego

$$v_j = (0, 0, 1, 0, 0, 0) - (1, 0, 1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0) = v_{32}.$$

Para estos cálculos es útil recordar que sumar y restar en estos espacios vectoriales son la misma cosa (equivalentemente, cada elemento es su propio inverso). Por tanto, Carmen debe abrir la ventana 32, que es la ventana 1 del piso 4.